2011/2012
61. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie C*

(*Termín odovzdania: v pondelok 16. januára 2012.*)

1. Nájdite všetky trojčleny $p(x) = ax^2 + bx + c$, ktoré dávajú po delení dvojčlenom $x+1$ zvyšok 2 a po delení dvojčlenom $x + 2$ zvyšok 1, pričom $p(1) = 61$. (*Jaromír Šimša*)

2. Dĺžky strán trojuholníka sú v metroch vyjadrené celými číslami. Určte ich, ak má trojuholník obvod 72 m a ak je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere 3 : 4. (*Pavel Leischner*)

3. Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí množinová rovnosť

$$\big\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\big\} = \{2,3,5,60,90,180\},$$

pričom (x,y) a $[x,y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y. (*Tomáš Jurík*)

4. Reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnici $ab + bc + cd + da = 16$.
a) Dokážte, že medzi číslami a, b, c, d sa nájdu dve so súčtom najviac 4.
b) Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$? (*Ján Mazák*)

5. Daný je rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky a a ramenami dĺžky b. Pomocou nich vyjadrite polomer R kružnice opísanej a polomer r kružnice vpísanej tomuto trojuholníku. Potom ukážte, že platí $R \geqq 2r$, a zistite, kedy nastane rovnosť. (*Leo Boček*)

6. Na hracej ploche $n \times n$ tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou *skok* na políčko, ktoré je doposiaľ biele, a toto políčko zafarbí namodro. Pritom pod *skokom* rozumieme bežný ťah šachovým jazdcom, t. j. presun figúrky o dve políčka zvislo alebo vodorovne a súčasne o jedno políčko v druhom smere. Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Postupne pre $n = 4, 5, 6$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky. (*Pavel Calábek*)