MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2021/2022

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z8

1 Na tabuli bola napísaná úloha na delenie dvoch kladných čísel. Dávid si všimol, že ak delenec zväčší o 2 a deliteľ o 7, podiel sa nezmení. O koľko treba zväčšiť deliteľa, aby pri zväčšení delenca o 3 zasa vyšiel ten istý podiel?

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Ak pôvodný delenec označíme n, pôvodný deliteľ t a hľadané číslo z, tak zo zadania dostávame podmienky

$$\frac{n+2}{t+7} = \frac{n}{t} = \frac{n+3}{t+z}.$$

Po úprave prvej z nich dostávame:

$$nt + 2t = nt + 7n,$$

$$2t = 7n,$$

$$t = \frac{7}{2}n.$$

Po úprave druhej z nich dostávame:

$$nt + zn = nt + 3t,$$

$$zn = 3t,$$

$$\frac{z}{3}n = t.$$

Porovnaním oboch výsledkov dostávame:

$$\frac{z}{3}n = \frac{7}{2}n.$$

Keďže n je kladné, môžeme ním vydeliť, a dostávame

$$\frac{z}{3} = \frac{7}{2},$$

$$z = 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5.$$

Deliteľ teda musíme zväčšiť o 10,5.

Poznámka:

Situácie zo zadania naozaj môže nastať: V súlade s medzivýsledkom $t = \frac{7}{2}n$ vyhovuje prípad $t = 2$ a $n = 7$.

Pokyny:

2 body za pomocné úvahy a čiastkové úpravy; 2 body za výsledok; 2 body za dostatočný popis postupu riešenia.

---

2 Po oslave odložila mamička posledný kúsok torty pre tetu. Keď teta konečne dorazila, našla namiesto pochúťky len špinavý tanier. Pri pátraní po vinníkovi dostala mamička od svojich štyroch detí nasledujúce odpovede:

Adam: „Zjedla to Bianka alebo Cyril.“,

Bianka: „Zjedol to Adam alebo Cyril.“,

Cyril: „Nikto z nás neklame.“,

Dana: „Všetci okrem mňa klamú.“.

Nakoniec sa ukázalo, že tortu dojedlo jedno z detí a že toto dieťa hovorilo pravdu. Zistite, ktoré dieťa to bolo.

(Erika Novotná)

Riešenie:

Dieťa, ktoré zjedlo tortu, hovorilo pravdu, preto Adam ani Bianka tortu zjesť nemohli. V prípade, že by to urobili, nemohli by totiž tvrdiť, že to spravil niekto iný.

Keby tortu dojedol Cyril, musel by hovoriť pravdu, teda by podľa jeho tvrdenia musela hovoriť pravdu aj Dana.

Dana však tvrdí, že Cyril (rovnako ako aj Bianka a Adam) klame, čo je v spore.

Takže Cyril tortu zjesť nemohol, musela to urobiť Dana. Podľa nej ostatné deti klamali, čo v tomto prípade naozaj museli.

Poznámka:

Treba si uvedomiť, že v úlohe pracujeme iba s implikáciou „Ak dieťa zjedlo tortu, tak hovorí pravdu.". Môžeme ju nahradiť jej obmenou „Ak dieťa klamalo, tak tortu nezjedlo.", ale v žiadnom prípade z toho nemôžeme usúdiť, že ak dieťa hovorilo pravdu, tak zjedlo tortu, resp. ak nezjedlo tortu, tak nevyhnutne muselo klamať. Riešenie založené na úvahách typu „Ak Adam hovorí, že tortu nezjedol, tak klame, a teda ju nemohli zjesť ani Cyril ani Bianka." síce vedú k riešeniu „Dana", ale sú nesprávne.

Pokyny:

2 body za vylúčenie niektorých možností vedúcich ku sporu; 2 body za správnu odpoveď (Dana); 2 body za dostatočné vysvetlenie.

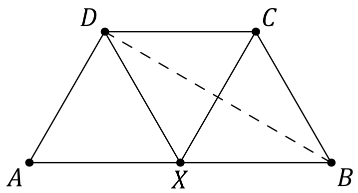
---

3 Peter narysoval lichobežník $ABCD$, ktorého základňa AB bola dvakrát dlhšia ako základňa CD, pričom strany AD, DC a CB boli rovnako dlhé. Potom dorysoval štvorec, ktorý mal jednu stranu spoločnú s kratšou stranou lichobežníka. Ten z nových vrcholov, ktorý ležal bližšie k bodu B ako k bodu A, označil N. Vypočítajte veľkosť uhla ABN. Nájdite všetky možnosti.

(Alžbeta Bohiniková)

Riešenie:

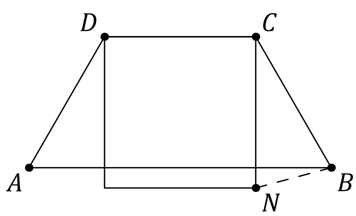
Z rovnosti dĺžok strán AD, DC a CB lichobežníka vyplýva, že ho môžeme rozdeliť na tri rovnostranné trojuholníky AXD, XDC a XBC.



Vnútorný uhol ABC je teda 60° a BCD potom 120°. Všimnime si tiež, že $AXCD$ a $BXDC$ sú kosoštvorce. To znamená, že strany AD a XC prvého sú rovnobežné a uhlopriečky DB a XC druhého sú navzájom kolmé. Z toho dostávame, že úsečky AD a DB sú navzájom kolmé.

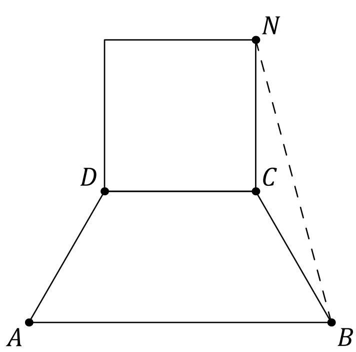
Keďže náš lichobežník má tri najkratšie strany a pri každej mohol Peter použiť teoreticky obe polroviny ňou určené, do úvahy prichádza týchto šesť polôh:

1 Základňa CD, polrovina DCB:



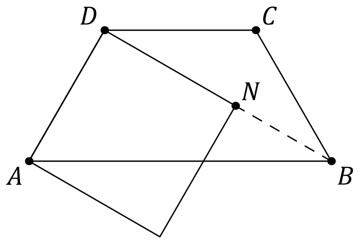
Trojuholník BCN je rovnoramenný, so zhodnými ramenami BC a CN a zhodnými uhlami pri základni BN. Veľkosť uhla BCN je rovná $120° - 90°$ čiže 30°. Veľkosť uhla CBN potom bude $(180° - 30°) : 2$ čiže 75° a veľkosť uhla ABN bude $75° - 60°$ čiže 15°.

2 Základňa CD, polrovina opačná k polrovine DCB:



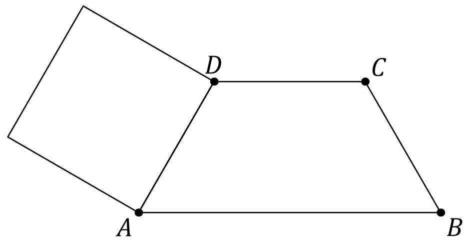
Trojuholník BCN je rovnoramenný, so zhodnými ramenami BC a CN a zhodnými uhlami pri základni BN. Uhol BCN má veľkosť $360° - 90° - 120°$ čiže $150°$, preto uhol CBN bude mať veľkosť $(180° - 150°) : 2$ čiže $15°$ a uhol ABN bude $60° + 15°$ čiže $75°$.

3 Rameno AD, polrovina ADB:



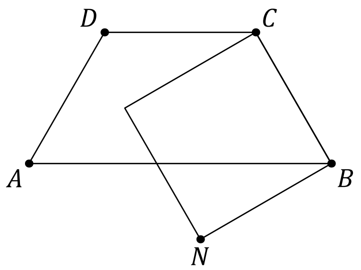
Bod N leží na úsečke BD, keďže tá, ako sme videli vyššie, je kolmá na úsečku AD. To znamená, že uhol ABN je totožný s uhlom ABD, a z pravouhlého trojuholníka ADB teda dostávame, že jeho veľkosť bude $180° - 90° - 60°$ čiže $30°$.

4 Rameno AD, polrovina opačná k polrovine ADB:



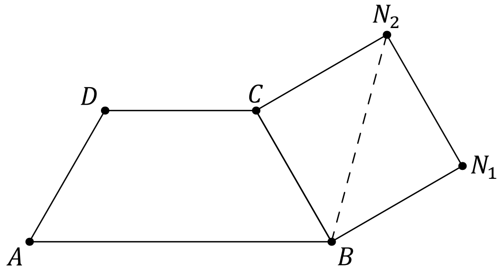
V tomto prípade sú však oba nové vrcholy štvorca k B ďalej než k A, takže táto situácia nenastáva.

5 Rameno BC, polrovina BCA:



Veľkosť uhla ABN je rovná rozdielu veľkosti uhlov NBC a ABC, čo je $90° - 60°$ čiže $30°$.

6 Rameno BC, polrovina opačná k polrovine BCA:



Tu sú oba nové vrcholy bližšie k B než k A.
V prvom prípade je veľkosť uhla ABN_1 rovná súčtu veľkostí uhlov ABC a CBN_1 čo je $60° + 90°$ čiže $150°$.
V druhom prípade je veľkosť uhla ABN_2 rovná súčtu veľkostí uhlov ABC a CBN_2 (ktorý má veľkosť $45°$, lebo BN_2 je osou pravého uhla CBN_1), čo je $60° + 45°$ čiže $105°$.

Zhrnutím dostávame, že veľkosť uhla ABN môže nadobúdať hodnoty $15°$, $30°$, $75°$, $105°$ alebo $150°$.

Pokyny:

1 bod za určenie veľkostí vnútorných uhlov lichobežníka; 2 body za ďalšie postrehy a medzivýsledky vedúce k riešeniu; 3 body za správne výsledky s dostatočný vysvetlením.

Riešenie zahrňujúce len jednu možnosť treba hodnotiť nanajvýš 4 bodmi.

Vydali: Slovenská komisia MO a IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2022