2010/2011
60. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 19. – 22. 6. 2011.*)

1. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že $a^2 < bc$. Dokážte, že $b^3 + ac^2 > ab(a+c)$. (*Pavel Novotný*)

2. Na tabuli je napísaných n nezáporných celých čísel, ktorých najväčší spoločný deliteľ je 1. V jednom kroku môžeme zotrieť dve také čísla x, y, že $x \geqq y$ a nahradiť ich dvojicou čísel $x-y$, $2y$. Určte, pre ktoré n-tice pôvodných čísel môžeme dosiahnuť stav, keď medzi číslami na tabuli bude $n-1$ núl. (*Poľsko*)

3. Body A, B, C, D ležia v tomto poradí na kružnici, pričom $AB \nparallel CD$ a dĺžka oblúka AB, ktorý obsahuje body C, D, je dvakrát väčšia ako dĺžka oblúka CD, ktorý neobsahuje body A, B. Nech E je taký bod v polrovine ABC, že $|AC| = |AE|$ a $|BD| = |BE|$. Dokážte, že ak kolmica z bodu E na priamku AB prechádza stredom oblúka CD neobsahujúceho body A, B, tak $|\measuredangle ACB| = 108°$. (*Tomáš Jurík*)

4. Mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficientmi spĺňa nasledujúcu podmienku: Ak pre mnohočleny $F(x)$, $G(x)$, $Q(x)$ s celočíselnými koeficientmi platí

$$P(Q(x)) = F(x) \cdot G(x),$$

tak aspoň jeden z mnohočlenov $F(x)$, $G(x)$ je konštantný. Dokážte, že $P(x)$ je konštantný mnohočlen. (*Poľsko*)

5. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ označme M, N postupne stredy strán AD, BC. Na stranách AB a CD sú postupne zvolené také body K a L, že $|\measuredangle MKA| = |\measuredangle NLC|$. Dokážte, že ak priamky BD, KM, LN prechádzajú jedným bodom, tak

$$|\measuredangle KMN| = |\measuredangle BDC| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle LNM| = |\measuredangle ABD|.$$

(*Poľsko*)

6. Nech a je ľubovoľné celé číslo. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel p takých, že

$$p \mid n^2 + 3 \qquad \text{a} \qquad p \mid m^3 - a$$

pre nejaké celé čísla n, m. (*Poľsko*)