2010/2011
60. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 17. – 23. 7. 2011.*)

1. Pre ľubovoľnú množinu $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ obsahujúcu štyri rôzne kladné celé čísla položme $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Označme n_A počet takých dvojíc (i, j) spĺňajúcich $1 \leqq i < j \leqq 4$, pre ktoré je číslo $a_i + a_j$ deliteľom čísla s_A. Určte všetky množiny A obsahujúce štyri rôzne kladné celé čísla, pre ktoré je hodnota n_A najväčšia možná. (*Mexiko*)

2. Daná je konečná množina $\mathcal{S}$ aspoň dvoch bodov v rovine, pričom žiadne tri body množiny $\mathcal{S}$ neležia na jednej priamke. Pojmom *veterný mlyn* rozumieme proces, ktorý začína ľubovoľnou priamkou l prechádzajúcou práve jedným bodom P množiny $\mathcal{S}$. Táto priamka sa otáča v smere hodinových ručičiek okolo *pivota* P, až kým po prvýkrát neprechádza ďalším bodom množiny $\mathcal{S}$. Tento bod, označme ho Q, sa stáva novým pivotom, t. j. priamka sa ďalej otáča v smere hodinových ručičiek okolo bodu Q, až kým neprechádza ďalším bodom množiny $\mathcal{S}$. Uvedený proces pokračuje donekonečna. Dokážte, že sa dá vybrať bod $P \in \mathcal{S}$ a priamka l prechádzajúca bodom P tak, že pre príslušný veterný mlyn je každý bod množiny $\mathcal{S}$ pivotom nekonečne veľa krát. (*Veľká Británia*)

3. Nech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia z množiny reálnych čísel do množiny reálnych čísel spĺňajúca

$$f(x + y) \leqq y f(x) + f(f(x))$$

pre všetky reálne čísla x a y. Dokážte, že $f(x) = 0$ pre všetky $x \leqq 0$. (*Bielorusko*)

4. Nech $n > 0$ je celé číslo. K dispozícii máme rovnoramenné váhy a n závaží s hmotnosťami $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Jednotlivé závažia máme v nejakom poradí ukladať na misky váh tak, aby obsah pravej misky nebol v žiadnom okamihu ťažší ako obsah ľavej misky. V každom kroku vyberieme jedno zo závaží, ktoré ešte nie je na váhach, a položíme ho buď na ľavú alebo na pravú misku váh. Tak postupujeme, kým neminieme všetky závažia. Určte, koľkými spôsobmi to celé môžeme urobiť. (*Irán*)

5. Nech f je funkcia z množiny celých čísel do množiny kladných celých čísel. Predpokladajme, že pre ľubovoľné dve celé čísla m a n je rozdiel $f(m) - f(n)$ deliteľný číslom $f(m - n)$. Dokážte, že pre každé dve celé čísla m a n také, že $f(m) \leqq f(n)$, je číslo $f(n)$ deliteľné číslom $f(m)$. (*Irán*)

6. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC a kružnica Γ jemu opísaná. Nech l je dotyčnica kružnice Γ a nech l_a, l_b, l_c sú obrazy priamky l v osových súmernostiach podľa priamok BC, CA, AB. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku určenému priamkami l_a, l_b, l_c sa dotýka kružnice Γ. (*Japonsko*)