

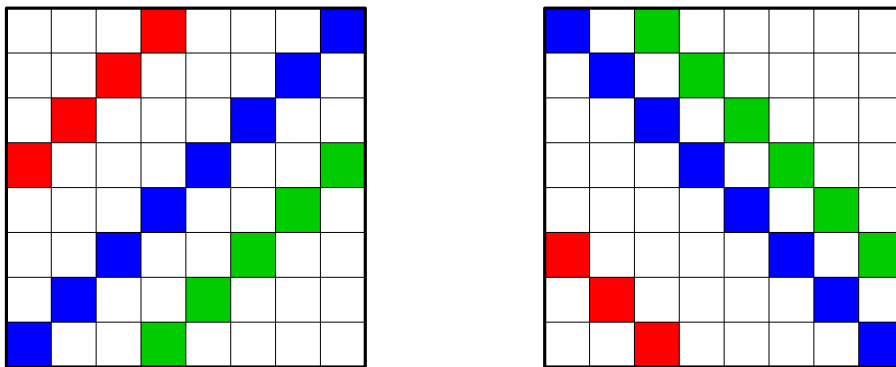
2021/2022  
71. ročník MO

Zadania úloh výberového sústredenia v kat. C

(Súťaž sa konala v piatok 29. apríla 2022.)

1. Tabuľka  $8 \times 8$  má vyfarbené niektoré políčka, pričom v žiadnom riadku, stĺpci ani na diagonále neležia viac ako štyri vyfarbené políčka. Koľko najviac políčok môže byť vyfarbených?

*Poznámka.* Dve políčka ležia na diagonále, ak priamka prechádzajúca ich stredmi zvierá so stranami tabuľky uhol  $45^\circ$ . Príklady diagonál sú na obr. 1.



Obr. 1

2. Nech  $ABCDE$  je konvexný päťuholník s piatimi rovnako dlhými stranami a pravými uhlami pri vrcholoch  $C$  a  $D$ . Jeho uhlopriečky  $AC$  a  $BD$  sa pretínajú v bode  $P$ . Dokážte, že priamky  $PE$  a  $AD$  sú kolmé.

3. Určte všetky trojice  $(x, y, z)$  reálnych čísel, ktoré spĺňajú

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 25z^2 &= 6xz + 8yz, \\ 3x^2 + 2y^2 + z^2 &= 240.\end{aligned}$$

4. Nájdite všetky kladné celé čísla  $n$  s nasledujúcou vlastnosťou: Všetkých kladných deliteľov čísla  $n$  vieme rozdeliť do dvojíc takých, že v každej dvojici jedno číslo delí to druhé.

5. V trojuholníku  $ABC$  spĺňajúcom  $|AB| = |AC|$  označíme  $M$  stred  $BC$ ,  $N$  stred  $AM$  a  $P$  priesečník priamok  $CN$  a  $AB$ . Vypočítajte pomer  $|AC| : |AP|$ .