**2019/2020**
**69. ročník Matematickej olympiády** *Zadania úloh výberového sústredenia*

**1.** [C1] Alexandra a Benjamín stavajú stenu na ploche $1 \times m$ políčok. Striedavo umiestňujú tehly, pričom Alexandra umiestňuje zelené tehly a Benjamín červené. Začína Alexandra. Výška steny nikdy nesmie presiahnuť $n$ a v momente, keď je umiestnených $m \times n$ tehiel, hra končí. Alexandra vyhrá, ak sa jej podarilo vytvoriť riadok pozostávajúca iba zo zelených tehiel; inak vyhrá Benjamín. Nájdite všetky dvojice $(m, n)$, pre ktoré vie Alexandra zaručene vyhrať, nech hrá Benjamín ľubovoľne.

**2.** [G2] Je daný ostrouhlý trojuholník $ABC$ s pätami výšok $D$, $E$, $F$ po rade z vrcholov $A$, $B$, $C$. Označme $\omega_B$ a $\omega_C$ kružnice vpísané trojuholníkom $BDF$ a $CDE$. Ďalej označme $M$ a $N$ po rade dotykové body $\omega_B$ a $\omega_C$ s úsečkami $DF$ a $DE$. Priamka $MN$ pretína kružnice $\omega_B$ a $\omega_C$ po rade v bodoch $P \neq M$ a $Q \neq N$. Dokážte, že $|MP| = |NQ|$.

**3.** [A3] Nech $n \geqq 2$ je kladné celé číslo a $a_1, \ldots, a_n$ sú reálne čísla so súčtom 0. Definujme množinu $A$ nasledovne:

$$A = \{(i, j);\ |;\ 1 \leqq i < j \leqq n,\ |a_i - a_j| \geqq 1\}.$$

Dokážte, že ak je množina $A$ neprázdna, tak

$$\sum_{(i,j)\in A} a_i a_j < 0.$$

**4.** [A1] Pre všetky celé čísla $n > 1$ nájdite všetky nekonštantné polynómy $P(x)$ s reálnymi koeficientami, ktoré pre všetky reálne čísla $x$ spĺňajú

$$P(x) \cdot P(x^2) \cdots P(x^n) = P\left(x^{\frac{1}{2}n(n+1)}\right).$$

**5.** [N2] Nájdite všetky trojice $(a, b, c)$ kladných celých čísel spĺňajúcich $a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2$.

**6.** [G3] Body $X$ a $Y$ ležia vnútri strán $AB$ a $AC$ ostrouhlého trojuholníka $ABC$ tak, že obraz priamky $BC$ v osovej súmernosti podľa priamky $XY$ je dotyčnica ku kružnici $\omega$ opísanej trojuholníku $AXY$. Označme $O$ stred kružnice opísanej trojuholníku $ABC$. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku $BCO$ sa dotýka $\omega$.

**7.** [A0] Nech $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ je funkcia taká, že pre všetky celé čísla $x$ a $y$ platí

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Dokážte, že funkcia $f$ je ohraničená.

**8.** [N0] Pre kladné celé číslo $N$ označme $f(N)$ počet usporiadaných dvojíc kladných celých čísel $(a, b)$ takých, že číslo

$$\frac{ab}{a+b}$$

je celé a je deliteľom $N$. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo $n$ platí, že $f(n)$ je druhá mocnina celého čísla.

**9.** [G0] V ostrouhlom trojuholníku $ABC$ pretína os vnútorného uhla $BAC$ stranu $BC$ v bode $D$. Os úsečky $AD$ pretína kružnicu opísanú trojuholníku $ABC$ v bodoch $E$ a $F$. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku $DEF$ sa dotýka $BC$.

**10.** [C0] V mestečku Výberkovo existujú tri školy $A$, $B$, $C$, pričom každú navštevuje aspoň jeden študent a každý študent navštevuje práve jednu školu. Pre ľubovoľnú trojicu študentov takých, že jeden navštevuje $A$, jeden navštevuje $B$ a jeden navštevuje $C$, platí, že nejakí dvaja z nich sa poznajú a nejakí dvaja z nich sa nepoznajú. Dokážte, že aspoň jedno z nasledovných tvrdení je pravdivé:
(i) Nejaký študent z $A$ pozná všetkých študentov z $B$.
(ii) Nejaký študent z $B$ pozná všetkých študentov z $C$.
(iii) Nejaký študent z $C$ pozná všetkých študentov z $A$.

**11.** [N1] Nájdite všetky možné hodnoty výrazu $a^3+b^3+c^3-3abc$, kde $a, b, c$ sú nezáporné celé čísla.

**12.** [A2] Nech $u_1, \ldots, u_{2020}$ sú reálne čísla spĺňajúce

$$u_1 + \ldots + u_{2020} = 0,$$
$$u_1^2 + \ldots + u_{2020}^2 = 1.$$

Označme $a = \min\{u_1, \ldots, u_{2020}\}$ a $b = \max\{u_1, \ldots, u_{2020}\}$. Dokážte, že

$$ab \leqq -\frac{1}{2020}.$$

**13.** [C3] Na stole leží 69 prázdnych krabíc $K_1, \ldots, K_{69}$. Máme k dispozícii neobmedzené množstvo guľôčok. Je dané celé číslo $n$. Anastázia a Bartolomej hrajú nasledovnú hru: V prvom kole Anastázia vezme $n$ guľôčok a rozdelí ich do 69 krabíc podľa svojho priania. Každé ďalšie kolo pozostáva z nasledovných krokov:

(a) Bartolomej si zvolí celé číslo $i$ spĺňajúce $1 \leqq i \leqq 68$ a rozdelí krabice na dve skupiny $K_1, \ldots, K_i$ a $K_{i+1}, \ldots, K_{69}$.

(b) Anastázia si vyberie jednu z týchto skupín, pridá po jednej guľôčke do každej krabice z vybratej skupiny a odstráni po jednej guľôčke z každej krabice z druhej skupiny.

Bartolomej vyhráva, ak na konci nejakého kola zostane nejaká krabica prázdna. Nájdite najmenšie $n$ také, že Anastázia vie zabrániť Bartolomejovi vo víťazstve.

**14.** [G1] Je daný trojuholník $ABC$. Kružnica $\Gamma$ prechádzajúca bodom $A$ pretína úsečky $AB$ a $AC$ po rade v jej vnútorných bodoch $D$ a $E$, a tiež pretína úsečku $BC$ v jej vnútorných bodoch $F$ a $G$ tak, že $F$ leží medzi $B$ a $G$. Dotyčnica ku kružnici opísanej $BDF$ v $F$ a dotyčnica ku kružnici opísanej $CEG$ v $G$ sa pretínajú v bode $T$. Predpokladajme, že $A \neq T$. Dokážte, že $AT \parallel BC$.

**15.** [C2] Je daná množina $n$ cukríkov, pričom každý váži aspoň 1 gram, a ich celková váha je $2n$ gramov. Dokážte, že pre každé reálne číslo $r$ spĺňajúce $0 \leqq r \leqq 2n-2$ vieme vybrať cukríky, ktorých celková váha je aspoň $r$ gramov, avšak najviac $r+2$ gramov.

**16.** [N3] Nech $\mathbb{Z}_{>0}$ označuje množinu kladných celých čísel. Je daná kladná celočíselná konštanta $K$. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ také, že pre všetky kladné celé čísla $a$, $b$ spĺňajúce $a+b>K$ platí

$$a + f(b) \mid a^2 + bf(a).$$