**2010/2011**
**60. ročník Matematickej olympiády** *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 1. – 7. 9. 2011.*)

**Súťaž jednotlivcov:**

**I-1.** Na začiatku je na tabuli napísané číslo 44. Celé číslo $a$ na tabuli môžeme nahradiť štyrmi navzájom rôznymi celými číslami $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ takými, že ich aritmetický priemer $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ je rovný číslu $a$. V každom kroku naraz nahradíme všetky čísla na tabuli vyššie opísaným spôsobom. Po 30 krokoch bude na tabuli $n = 4^{30}$ celých čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Dokážte, že

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n} \geqq 2011.$$

(*Chorvátsko*)

**I-2.** Dané je celé číslo $n \geqq 3$. Janko a Marienka hrajú nasledujúcu hru: Najskôr Janko označí strany pravidelného $n$-uholníka číslami $1, 2, \ldots, n$ v ľubovoľnom poradí, pričom každé číslo použije práve raz. Potom Marienka rozdelí uvedený $n$-uholník na trojuholníky pomocou $n-3$ uhlopriečok, ktoré sa vnútri $n$-uholníka nepretínajú. Všetky tieto uhlopriečky označíme číslom 1. Dovnútra každého trojuholníka napíšeme súčin čísel na jeho stranách. Nech $S$ je súčet týchto $n-2$ súčinov. Určte, aká bude hodnota $S$, ak Marienka chce, aby bolo $S$ čo najmenšie, Janko chce, aby bolo $S$ čo najväčšie a obaja hrajú najlepšie ako sa dá. (*Chorvátsko*)

**I-3.** V rovine sa kružnice $k_1$, $k_2$ so stredmi $I_1$, $I_2$ pretínajú v dvoch bodoch $A$ a $B$. Predpokladajme, že uhol $I_1AI_2$ je tupý. Dotyčnica ku $k_1$ vedená bodom $A$ pretína kružnicu $k_2$ znova v bode $C$ a dotyčnica ku $k_2$ vedená bodom $A$ pretína kružnicu $k_1$ znova v bode $D$. Nech $k_3$ je kružnica opísaná trojuholníku $BCD$. Označme $E$ stred oblúka $CD$ kružnice $k_3$ obsahujúceho bod $B$. Priamky $AC$ a $AD$ pretínajú kružnicu $k_3$ znova postupne v bodoch $K$ a $L$. Dokážte, že priamky $AE$ a $KL$ sú na seba kolmé. (*Slovinsko*)

**I-4.** Nech $k$ a $m$ sú kladné celé čísla, pričom $k > m$ a číslo $km(k^2 - m^2)$ je deliteľné číslom $k^3 - m^3$. Dokážte, že $(k - m)^3 > 3km$. (*Poľsko*)

**Súťaž družstiev:**

**T-1.** Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x + y) + x^2 + y^2$$

platí pre všetky dvojice $x, y \in \mathbb{R}$, pričom $\mathbb{R}$ je množina všetkých reálnych čísel. (*Chorvátsko*)

**T-2.** Nech $a$, $b$, $c$ sú kladné reálne čísla spĺňajúce rovnosť

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=2.$$

Dokážte, že

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqq \frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

(*Chorvátsko*)

**T-3.** Pre celé číslo $n \geqq 3$ označme $\mathcal{M}$ množinu $\{(x,y);\ x,y \in \mathbb{Z}, 1 \leqq x \leqq n, 1 \leqq y \leqq n\}$ pozostávajúcu z bodov roviny. (Symbol $\mathbb{Z}$ označuje množinu celých čísel.) Aký je najväčší možný počet prvkov podmnožiny $S \subseteq \mathcal{M}$, ktorá neobsahuje žiadne tri body ležiace vo vrcholoch pravouhlého trojuholníka? (*Maďarsko*)

**T-4.** Nech $n \geqq 3$ je prirodzené číslo. Súťaže podobnej MEMO sa zúčastnilo $3n$ účastníkov, ktorí dokopy hovoria $n$ rôznymi jazykmi. Každý účastník ovláda práve tri z týchto jazykov. Dokážte, že vieme vybrať aspoň $\lceil \frac{2}{9}n \rceil$ zo spomínaných $n$ jazykov tak, aby žiadny účastník neovládal viac ako dva z nich. (Symbol $\lceil x \rceil$ označuje najmenšie celé číslo, ktoré nie je menšie ako $x$.) (*Chorvátsko*)

**T-5.** Konvexný päťuholník $ABCDE$ má všetky strany rovnako dlhé. Uhlopriečky $AD$ a $EC$ sa pretínajú v bode $S$ tak, že $|\measuredangle ASE| = 60°$. Dokážte, že päťuholník $ABCDE$ má niektoré dve strany rovnobežné. (*Michal Szabados*)

**T-6.** Daný je ostrouhlý trojuholník $ABC$. Označme postupne $B_0$ a $C_0$ päty výšok z vrcholov $B$ a $C$. Bod $X$ leží vnútri trojuholníka $ABC$ tak, že priamka $BX$ sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku $AXC_0$ a priamka $CX$ sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku $AXB_0$. Dokážte, že priamky $AX$ a $BC$ sú na seba kolmé.

(*Česká republika*)

**T-7.** Nech $A$ a $B$ sú disjunktné neprázdne množiny také, že $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Dokážte, že existujú prvky $a \in A$ a $b \in B$ také, že číslo $a^3 + ab^2 + b^3$ je deliteľné 11.

(*Poľsko*)

**T-8.** Kladné celé číslo $n$ nazveme *úžasným*, ak existujú kladné celé čísla $a$, $b$, $c$ spĺňajúce rovnosť

$$n = (b,c)(a,bc) + (c,a)(b,ca) + (a,b)(c,ab).$$

Dokážte, že existuje 2011 po sebe idúcich kladných celých čísel, ktoré sú úžasné. (Symbolom $(m,n)$ označujeme najväčšieho spoločného deliteľa kladných celých čísel $m$ a $n$.) (*Litva*)