

Česko-poľsko-slovensko-rakúske stretnutie 2022

ISTA, Rakúsko

(Prvý deň – 2. júl 2022)

1. Nech k je kladné celé číslo nie väčšie než 2022. Alica a Bob hrajú hru na plániku o 2022×2022 políčkach. Na začiatku hry sú všetky políčka biele. Hráči sa striedajú v ťahoch, Alica začína. Alica môže vo svojom ťahu zafarbiť jedno biele políčko načerveno alebo vynechať ťah. Bob môže vo svojom ťahu zafarbiť jeden biely štvorec tvorený $k \times k$ políčkami celý namodro alebo vynechať ťah. Akonáhle obaja hráči vynechajú ťah, hra sa končí a hráč, ktorý zafarbil viac políčok, vyhráva (ak nevyhrá ani jeden hráč, nastáva remíza).

Pre každé celé k od 1 do 2022 vrátane určte, ktorý hráč má víťaznú stratégiu.

2. Nájdite všetky funkcie f také, že $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ a

$$f\left(f(x) + \frac{y+1}{f(y)}\right) = \frac{1}{f(y)} + x + 1$$

pre všetky kladné čísla x a y .

3. Kružnice Ω_1 a Ω_2 s rôznymi polomerami sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch. Označme jeden z nich P .

Priamka l prechádzajúca P pretína oblúk patriaci Ω_1 nachádzajúci sa na vonkajšej strane Ω_2 v bode X_1 a oblúk patriaci Ω_2 na vonkajšej strane Ω_1 v X_2 . Nech R je bod úsečky X_1X_2 taký, že $|PX_1| = |RX_2|$. Ďalej T je priesečník dotýčnice k Ω_1 v X_1 a dotýčnice k Ω_2 v X_2 .

Dokážte, že pre dané kružnice Ω_1 a Ω_2 a bod P existuje kružnica, dotýkajúca sa priamky RT bez ohľadu na voľbu l .

Čas: 4 hodiny a 30 minút.

Za každú úlohu možno získať 7 bodov.

Language: Slovak

Česko-poľsko-slovensko-rakúske stretnutie 2022

ISTA, Rakúsko

(Druhý deň – 3. júl 2022)

4. Označme $\tau(n)$ počet kladných deliteľov kladného celého čísla n a $\sigma(n)$ súčet jeho kladných deliteľov. Nájdite všetky kladné celé n také, že

$$\sigma(n) = \tau(n) \lceil \sqrt{n} \rceil,$$

kde $\lceil x \rceil$ znamená najmenšie celé číslo nie menšie než x .

5. Nech v trojuholníku ABC spĺňajúcom $|AB| < |AC|$ má kružnica jemu opísaná stred O . Os uhla BAC pretína stranu BC v D . Kolmica na BC v D pretína úsečku AO v X . Ďalej nech Y je stred úsečky AD . Dokážte, že B , C , X a Y ležia na kružnici.

6. Majme 26 písmen A až Z. *Reťazec* je konečná postupnosť týchto písmen. Reťazec je *pekný*, keď obsahuje každé z 26 písmen aspoň raz a všetky permutácie našich 26 písmen sa v ňom vyskytujú ako podpostupnosti rovnako veľakrát. Dokážte, že:

1. existuje pekný reťazec,
2. každý pekný reťazec má aspoň 2022 písmen.

(Permutácia π daných 26 písmen sa vyskytuje v reťazci r ako podpostupnosť ak existuje 26 indexov i_1 až i_{26} takých, že $i_1 < i_2 < \dots < i_{26}$ a $(r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i_{26}}) = \pi$.)

Čas: 4 hodiny a 30 minút.

Za každú úlohu možno získať 7 bodov.

Language: Slovak