

---

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

## Zadania úloh domáceho kola kategórie A

---

1 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}2x + [y] &= 2022, \\3y + [2x] &= 2023.\end{aligned}$$

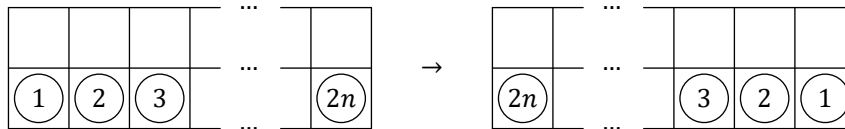
( $[a]$  označuje (dolnú) celú časť reálneho čísla  $a$ , t. j. najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako  $a$ . Napr.  $[1,9] = 1$  a  $[-1,1] = -2$ .)

(Jaroslav Švrček)

2 Daný je ostrouhlý trojuholník  $ABC$ . Na polpriamkach opačných k  $BA$  a  $CA$  ležia postupne body  $D$  a  $E$  tak, že  $|BD| = |AC|$  a  $|CE| = |AB|$ . Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku  $ADE$  leží na kružnici opísanej trojuholníku  $ABC$ .

(Patrik Bak)

3 Pre dané kladné celé číslo  $n$  uvažujme obdĺžnikový hrací plán  $2n \times 2$  a na ňom  $2n$  žetónov očíslovaných  $1, 2, \dots, 2n$  a rozmiestnených ako na obrázku vľavo. V jednom ťahu je možné posunúť jeden žetón z jeho políčka na políčko susediace stranou, pokiaľ je prázdne.<sup>1</sup> Najmenej koľkými ťahmi možno z pôvodného rozostavenia získať rozostavenie na obrázku vpravo?



(Josef Tkadlec)

4 Sú dané dve nepárne prirodzené čísla  $k$  a  $n$ . Na tabuli je pre každé dve prirodzené čísla  $i, j$  spĺňajúce  $1 \leq i \leq k$  a  $1 \leq j \leq n$  napísaný zlomok  $\frac{i}{j}$ . Určte také reálne číslo  $q$ , že ak všetky zlomky na tabuli zoradíme podľa hodnoty od najmenšieho po najväčší (zlomky s rovnakou hodnotou v ľubovoľnom poradí), uprostred tohto zoznamu bude zlomok s hodnotou  $q$ .

(Martin Melicher)

5 Daný je ostrouhlý rôznostranný trojuholník  $ABC$ . Os vnútorného uhla pri vrchole  $A$  a osi strán  $AB, AC$  vymedzujú trojuholník. Dokážte, že priesečník jeho výšok leží na ťažnici z vrcholu  $A$ .

(Josef Tkadlec)

6 Uvažujme postupnosť  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  definovanú nasledovne:

- $a_0 = 3$ .
- Ak  $n$  je nezáporné celé číslo, tak  $a_{n+1} = a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n - 1$ .

- Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel deliacich aspoň jeden člen tejto postupnosti.
- Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel nedeliacich žiadny člen tejto postupnosti.

(Martin Melicher)

---

Termín odovzdania riešení: **29. 11. 2022**

---

<sup>1</sup>Hru si môžete vyskúšať na <https://skmo.sk/72a3>.