SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

61. ročník, školský rok 2011/2012

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh (maďarská verzia)

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 61. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **28. novembra 2011** (kategória **A**) a do **16. januára 2012** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. V kategóriách **B** a **C** tým súťaž končí. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2012 v Argentíne), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2012 na Slovensku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v septembri 2012 vo Švajčiarsku).

Termíny 61. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	06. 12. 2011	17. 01. 2012	25. – 28. 03. 2012
Kategórie B, C	26. 01. 2012	17. 04. 2012	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.* Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO* pri pobočkách JSMF. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera
Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2011/2012
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://matematika.okamzite.eu`
`http://fpedas.uniza.sk/~novotny/MO.htm` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je v KMS určená kategória BETA. A nakoniec pre tých, čo majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, bola určená kategória GAMA, ktorú od tohto školského roku nahradil nový korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete v priloženom samostatnom letáku, prípadne na `http://kms.sk` a `http://kms.sk/iks`.

Na ďalšiu spoluprácu sa tešia

Bc. Jozef Jakubík, Peter Csiba

MATEMATIKA OLIMPIA

61-ik évfolyam 2011/2012-es tanév Házi forduló

****

A KATEGÓRIA

A – I – 1

Jelölje n az összes olyan tízjegyű szám összegét, amelyek a 0, 1, ..., 9 számjegyek mindegyikét tartalmazzák. Határozd meg, hogy az n szám milyen maradékot ad 77-tel osztva!

(*Pavel Novotný*)

A – I – 2

Egy találkozón részt vett néhány személy. Bármely kettőnek, akik nem ismerték egymást, a résztvevők között pontosan két közös ismerőse volt. Továbbá tudjuk, hogy az A és B résztvevők ismerték egymást, de nem volt egyetlen közös ismerősük sem. Bizonyítsd be, hogy a résztvevők között A-nak és B-nek egyforma számú ismerőse volt! Igazold azt is, hogy a találkozón lehettek pontosan hatan! (*Vojtech Bálint*)

A – I – 3

Egy egyenlő szárú, de nem egyenlő oldalú háromszögben jelölje S a beírt kör középpontját, T a súlypontot, és V a magasságpontot.

a) Bizonyítsd be, hogy az S pont a TV szakasz belső pontja!

b) Határozd meg az adott háromszög oldalainak arányát, ha az S a TV szakasz felezőpontja!

(*Jaromír Šimša*)

A – I – 4

Legyenek p és q különböző prímszámok, m és n természetes számok, és az

$$\frac{mp-1}{q} + \frac{nq-1}{p}$$

összeg egész szám. Bizonyítsd be, hogy ekkor teljesül az

$$\frac{m}{q} + \frac{n}{p} > 1$$

egyenlőtlenség! (*Jaromír Šimša*)

A – I – 5

Adott két egybevágó k_1 és k_2 kör. Középpontjaik távolsága a sugaruk hosszával egyenlő. Jelölje A és B ezen körök metszéspontjait. A k_2 körön vegyük fel a C pontot úgy, hogy a BC szakasz messe a k_1 kört egy a B ponttól különböző L pontban. Az AC egyenes messe a k_1 kört egy, az A ponttól különböző K pontban. Bizonyítsd be, hogy az az egyenes, amely tartalmazza a KLC háromszög C ponthoz tartozó súlyvonalát, átmegy egy olyan fixponton, amelynek helyzete független a C pont helyzetétől! (*Tomáš Jurík*)

A – I – 6

Keresd meg azt a legnagyobb k valós számot, amelyre a

$$\frac{2(a^2+kab+b^2)}{(k+2)(a+b)} \geq \sqrt{ab}$$

egyenlőtlenség minden a és b pozitív valós számra teljesül! (*Ján Mazák*)

MATEMATIKA OLIMPIA

61-ik évfolyam 2011/2012-es tanév Házi forduló

****

B KATEGÓRIA

B – I – 1

Keresd meg azt a legkisebb és legnagyobb, 11-gyel osztható tízjegyű számot, amelyben egyetlen számjegy sem ismétlődik! (*Jaroslav Zhouf*)

B – I – 2

Adott a P területű, derékszögű ABC háromszög, melynek derékszöge a C csúcsnál fekszik. Legyen F a C csúcsból AB átfogóra húzott magasságvonal talppontja. Az A, illetve B pontból az AB egyenesre húzott merőlegeseken tekintsük azokat a D, illetve E pontokat, amelyek az ABC-vel ellentétes félsíkban fekszenek, és amelyekre igaz az $|AF| = |AD|$, illetve $|BF| = |BE|$ egyenlőség! Jelölje Q a DEF háromszög területét. Bizonyítsd be, hogy teljesül a $P \geq Q$ egyenlőtlenség, és határozd meg, mikor áll fenn egyenlőség! (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Keresd meg az összes x, y valós számokból álló számpárt, amelyre teljesül az

$$x \cdot \lfloor y \rfloor = 7,$$
$$y \cdot \lfloor x \rfloor = 8.$$

egyenletrendszer! ($\lfloor a \rfloor$ az a szám *alsó egész részét* jelöli, vagyis azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb, mint a.) (*Pavel Novotný*)

B – I – 4

Adottak a P ponton áthaladó a és c metszőegyenesek, illetve a B pont, amely nem fekszik ezeken az egyeneseken. Szerkeszd meg az $ABCD$ téglalapot (amely lehet akár négyzet is!) úgy, hogy az A, C és D csúcsok rendre az a, c és PB egyeneseken feküdjenek! (*Jaromír Šimša*)

B – I – 5

Egy bizonyos városban jól kiépített hálózat működik a pletykák terjesztésére, amelyben minden pletykás férfi pontosan három pletykás nővel cserél információt, és minden pletykás nő pontosan három pletykás férfival cserél információt. A pletykák más módon nem terjednek.

a) Bizonyítsd be, hogy a városban a pletykás férfiak és pletykás nők száma megegyezik!
b) Tételezzük fel, hogy ez a pletykahálózat összefüggő (azaz a pletyka tetszőleges pletykástól el tud jutni bármely másik pletykáshoz a fent említett módon). Bizonyítsátok be, hogy ha a városból bármely pletykás elköltözik, akkor a pletykahálózat továbbra is összefüggő marad!

(*Ján Mazák*)

B – I – 6

Anna és Boris kártyajátékot játszik. Mindkettőjüknek öt-öt, 1-től 5-ig számozott kártyája van (mindegyikből pontosan egy darab). Az öt forduló mindegyikében kitesznek egy-egy kártyát, és akinek a kártyáján nagyobb szám szerepel az egy pontot kap. Azonos értékek esetén senkinek nem jár pont. A kirakott kártyákat már nem lehet újból felhasználni. Az a győztes, akinek a végén több pontja van. Az összes lehetséges játékmenet hány százalékában lesz Anna a győztes? (*Tomáš Jurík*)

C KATEGÓRIA

C – I – 1

Keresd meg az összes olyan $p(x) = ax^2 + bx + c$ polinomot, amelynek $(x + 1)$-el való osztási maradéka 2 és $(x + 2)$-vel való osztási maradéka 1, valamint teljesül a $p(1) = 61$ egyenlőség!

(*Jaromír Šimša*)

C – I – 2

Egy háromszög mindhárom oldalának hossza méterekben mérve egész szám. Határozd meg az oldalak hosszát, ha a háromszög kerülete 72 m és a beírt körének érintési pontja a háromszög leghosszabb oldalát 3 : 4 arányban osztja fel! (*Pavel Leischner*)

C – I – 3

Keresd meg az összes természetes számokból álló a, b, c számhármast, amelyekre teljesül a

$$\big\{(a, b), (a, c), (b, c), [a, b], [a, c], [b, c]\big\} = \{2, 3, 5, 60, 90, 180\},$$

halmazegyenlőség, ahol (x, y), illetve $[x, y]$ az x és y számok legnagyobb közös osztóját, illetve legkisebb közös többszörösét jelöli! (*Tomáš Jurík*)

C – I – 4

Az a, b, c, d valós számok kielégítik az $ab + bc + cd + da = 16$ egyenlőséget.

a) Bizonyítsd be, hogy az a, b, c, d számok között található kettő, melyek összege legfeljebb 4.

b) Mennyi az $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ kifejezés lehető legkisebb értéke? (*Ján Mazák*)

C – I – 5

Adott egy egyenlő szárú háromszög, melynek alapja a, szárainak hossza pedig b. Fejezd ki a köré írt körének R és a beírt körének r sugarát! Ezután bizonyítsd be, hogy teljesül az $R \geq 2r$ egyenlőtlenség és határozd meg, mikor áll fenn egyenlőség! (*Leo Boček*)

C – I – 6

Egy $n \times n$-es, fehér négyzeteket tartalmazó játéktáblán Mónika és Tamara felváltva lép egy bábuval, és a következő játékot játsza: Először Mónika leteszi a bábut egy tetszőleges mezőre, és ezt a mezőt kékre festi. Ezután mindig a soron következő játékos a bábuval tesz egy *lépést* eddig még fehéren hagyott mezőre, és ezt kékre festi. *Lépés* alatt a klasszikus sakkból ismert huszárugrást értjük, tehát azt a mozgást, amikor a bábu két mezővel vízszintes, vagy függőleges irányba, majd egy mezővel erre merőlegesen lép. Az a játékos aki nem tud a szabályok szerint lépni, veszít. Az $n = 4, 5, 6$ értékekre döntsd el, hogy melyik játékos tud úgy játszani, hogy az ellenfele lépéseitől függetlenül biztosan nyerjen! (*Pavel Calábek*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

61. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Pavel Leischner, PhD., RNDr. Ján Mazák, doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.

Prekladateľ:	Mgr. Štefan Gyürki, PhD.
Redakčná úprava:	Mgr. Peter Novotný, PhD.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011

Korešpondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták zimnej časti 33. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určený nový seminár *i*KS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korespondenčního semináře. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Informácie o tomto novom seminári sú priložené v samostatnom letáku. Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Každá časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $k_\alpha = r + u$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy $(3-7)$ môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa bude zostavovať päť regionálnych výsledkových listín a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko, Bratislava a zahraničie. Na záverečné sústredenie bude zvyčajne pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu Slovenska, ďalších aspoň 5 podľa celkového bodového zisku a najúspešnejší riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústredenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi slovenských regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi uspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústredenie KMS kategórie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy $(7-11)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov (z toho najviac 10 zahraničných), ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami.

Spoločné pre obe kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzujeme si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia spolu so vzorovými riešeniami a prípadnou ďalšou korešpondenciou Ti môžu byť zasielané domov, do školy alebo na inú adresu. Svoju voľbu vyznač v návratke. V prípade, ak chceš korešpondenciu posielať inde ako do školy, je potrebné zaslať nám s návratkou aj tri obálky (najlepšie formátu A5) s vypísanou adresou (známky nie sú potrebné).
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Elektronické posielanie riešení

Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš po prihlásení na stránke `kms.sk/eriesenia`. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá.

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania série o **17:00**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf. Pri ich tvorbe je ideálne použiť TEX, prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií.
- Na stránke `kms.sk/eriesenia` je možné (po prihlásení) vyplniť **elektronickú prihlášku**. Nebudeš ju tak musieť zasielať písomne. Je však potrebné (v prípade posielania korešpondencie inde ako do školy) zaslať nám obálky ako doteraz. Opravené príklady sa Ti totiž budú späť posielať klasickým spôsobom.

Náboj KMS

Aj v tomto školskom roku sa môžete tešiť na tradičnú matematickú súťaž – Náboj KMS, ktorý je naplánovaný na piatok 23. marca 2012. Podrobnejšie informácie nájdete onedlho na stránke `kms.sk/naboj` a budú tiež zaslané na vašu školu.

Prednášky

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 24. marca 2012 (po Náboji KMS). Bližšie informácie nájdete v pozvánke, ktorú čoskoro zašleme vám alebo na vašu školu, a tiež na internetovej stránke `www.fks.sk/klub`.

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK). Ďalšie informácie môžete nájsť na stránke `www.sezam.sk`.

.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do zimnej časti KMS 2011/2012 – **poslať spolu s 1. sériou alebo vyplniť na** `kms.sk/eriesenia`**!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....
Škola: ....
Trieda ....
Počet účastí na celoštátnom kole MO: ...., z ktorých bolo .... úspešných
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Tel. domov: .... mobil (vlastný): .... e-mail: ....

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 3 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série zimnej časti KMS 2011/2012

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Ninja korytnačky Michelangelo, Donatello, Leonardo a Raphaelo si dali turnaj v jedení pizze. Súčet umiestnení Michelangela, Donatella a Leonarda bol 6. Súčet umiestnení Raphaela a Donatella bol tiež 6. Aké bolo poradie ninja korytnačiek, ak sa Donatello umiestnil lepšie ako Michelangelo a žiadni dvaja sa neumiestnili na rovnakom mieste?

Úloha č. 2:
Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je deliteľný 17 a aj ciferný súčet čísla o jeden väčšieho je deliteľný 17.

Úloha č. 3:
Na jednom z políčok šachovnice 8×8 je kráľ. Marek a Paľo ním striedavo hýbu podľa štandardných pravidiel. Nemôžu ho ale posunúť na políčko, odkiaľ bol práve posunutý. Vyhrá ten, kto posunie kráľa na políčko, kde už niekedy predtým bol. Prvý je na ťahu Marek. Pre koho existuje víťazná stratégia[1] a v čom spočíva? Stratégiu popíšte pre ľubovoľnú východziu polohu kráľa.

Úloha č. 4:
Nech $n = \overline{AB}$ je dvojciferné prirodzené číslo. Prirodzené číslo s je *strýčkom* čísla n, ak

- číslica na mieste jednotiek v čísle s je B,
- ostatné číslice v s sú nenulové a ich súčet je A.

(Napríklad 31 má strýčkov 31, 121, 211 a 1111.) Nájdite všetky n, ktoré delia všetkých svojich strýčkov.

Úloha č. 5:
Obdĺžnik nazývame *štvorčekový*, ak sa dá rozrezať na dva alebo viac štvorcov s celočíselnými dĺžkami strán tak, že najmenší z nich je unikátny (t. j. je tam taký len jeden). Nájdite rozmery štvorčekového obdĺžnika s najmenším možným obsahom.

Úloha č. 6:
Nech p, l, u, s sú také prirodzené čísla, že ich najmenší spoločný násobok je $p + l + u + s$. Dokážte, že $p \cdot l \cdot u \cdot s$ je deliteľné 3 alebo 5.

Úloha č. 7:
Nech x, y sú kladné reálne čísla také, že $(1 + x)(1 + y) = 2$. Dokážte, že platí

$$xy + \frac{1}{xy} \geq 6.$$

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Pre kladné celé čísla a, b, c, d platí $ab = cd$. Dokážte, že číslo $a + b + c + d$ je zložené.

Úloha č. 9:
Nájdite všetky zložené kladné celé čísla n, pre ktoré je možné umiestniť všetkých deliteľov čísla n väčších ako 1 do kruhu tak, aby bola každá dvojica susediacich deliteľov súdeliteľná.

Úloha č. 10:
Petržlena už prestalo baviť hrať obyčajné piškvorky s CéDečkom. Preto si vymyslel inú hru, podobnú piškvorkám. Hrá sa na nekonečnom štvorčekovom papieri. Petržlen začína a označí nejaké neoznačené políčko krížikom, potom CéDečko označí nejaké neoznačené políčko krúžkom a takto sa ďalej striedajú. Vyhráva hráč, ktorého znak vyplní štvorec 2×2. Dokáže Petržlen vo svojej hre vždy vyhrať?

Úloha č. 11:
Edo má doma 8 krabíc a v každej z nich je práve 6 bezfarebných guľôčok. Každú guľôčku sa Edo rozhodol zafarbiť jednou z n rôznych farieb tak, aby platilo:

[1] Víťaznou stratégiou myslíme spôsob, ako má hráč hrať, aby vyhral bez ohľadu na to, ako hrá protihráč.

- Ľubovoľné dve guľôčky v rovnakej krabici majú rôzne farby.
- Ľubovoľné dve farby sa súčasne vyskytujú v maximálne jednej krabici.

Zistite, pre aké najmenšie n dokáže Edo guľôčky takto zafarbiť.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **10. október 2011** (pre zahraničie 7. október 2011).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

Zadania 2. série zimnej časti KMS 2011/2012

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

a) Slony našli 3 kruhy k, l a m. Uložili ich do roviny tak, aby sa každé dva navzájom zvonku dotýkali. Zistili, že stredy kruhov tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. Musia mať k, l a m rovnaký polomer?

b) Slony tentokrát našli 4 kruhy a, b, c a d. Uložili ich do roviny tak, aby sa každý kruh zvonku dotýkal aspoň dvoch ďalších kruhov. Zistili, že stredy kruhov tvoria vrcholy štvorca. Musia mať a, b, c a d rovnaký polomer?

Úloha č. 2:
Zebry rady kreslia čo najviac rôznych rovnostranných trojuholníkov. Aby to však nemali také ľahké, tak aspoň dva vrcholy trojuholníka sú zároveň vrcholmi dopredu nakresleného

a) štvorca;

b) pravidelného šesťuholníka;

c) pravidelného dvanásťuholníka.

Koľko najviac rôznych rovnostranných trojuholníkov vedia v jednotlivých situáciách zebry nakresliť? Dva trojuholníky považujeme za rovnaké, ak majú všetky tri vrcholy zhodné. Inak sú tieto trojuholníky rôzne.

Úloha č. 3:
Opica Tomáš často hrá nasledovnú hru: nájde si rovnú paličku, nakreslí štvorec $ABCD$, ktorého strana je dlhšia ako palička a snaží sa vložiť paličku do štvorca. Musí však dodržať tieto pravidlá: palička začína v bode ležiacom na strane AB (nazveme ho bod E) a končí v bode ležiacom na strane BC (nazveme ho bod F). Zároveň má byť obsah trojuholníka EBF čo najväčší. Poraďte Tomášovi, ako má umiestniť paličku!

Úloha č. 4:
Krokodíl Jonatán našiel v rieke rovnostranný trojuholník ABC. Hneď našiel bod P, pre ktorý platilo $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC|$. Nájdite všetky body s takouto vlastnosťou. Nezabudnite ukázať, že iné body túto vlastnosť nemajú.

Úloha č. 5:
Stádo žiráf si láme hlavu nad touto úlohou: je možné rozdeliť kruh tromi priamkami na 7 častí s rovnakým obsahom?

Úloha č. 6:
Nech ABC je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A, pre ktorý platí $|AB| < |AC|$. Nech M je stred strany BC, p je kolmica na stranu BC prechádzajúca bodom M a D je priesečník priamky p a úsečky AC. Ďalej nech q je kolmica na BD prechádzajúca bodom B, r je rovnobežka s AC prechádzajúca bodom M a E je priesečník q a r. Dokážte, že trojuholníky AEM a MCA sú podobné práve vtedy, keď $|\sphericalangle ABC| = 60°$.

Úloha č. 7:
Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Označme D priesečník osi uhla BAC a úsečky BC a E pätu výšky z bodu B na stranu AC. Dokážte, že platí $|\sphericalangle CED| > 45°$.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Štvoruholník $ABCD$ je tetivový. Označme postupne r_a, r_b, r_c a r_d polomery kružníc vpísaných trojuholníkom BCD, ACD, ABD a ABC. Dokážte, že platí $r_a + r_c = r_b + r_d$.

Úloha č. 9:
Nech D je ľubovoľný bod vnútri strany AB trojuholníka ABC. Bod E vnútri trojuholníka ABC je priesečníkom úsečky CD so spoločnou dotyčnicou kružníc vpísaných trojuholníkom ACD a BCD. Dokážte, že ak budeme hýbať bodom D vnútri úsečky AB, tak bod E bude opisovať oblúk kružnice.

Úloha č. 10:
Trojuholník ABC nemá pravý uhol. Nech D je ľubovoľný bod vnútri strany BC. Označme postupne E a F päty výšok z bodu D na priamky AB a AC. Nech P je priesečník priamok BF a CE. Dokážte, že priamka AP je výškou trojuholníka ABC práve vtedy, keď AD je osou uhla CAB.

Úloha č. 11:
Nech ABC je trojuholník s opísanou kružnicou k. Kružnica m leží vnútri uhla CAB, dotýka sa strán AB, AC v bodoch M_1, N_1 a dotýka sa vnútra kružnice k v bode P_1. Body M_2, N_2, P_2 a M_3, N_3, P_3 sú definované podobne pre uhly ABC a BCA. Ukážte, že úsečky M_1N_1, M_2N_2 a M_3N_3 sa pretínajú v jednom bode, ktorý je zároveň ich spoločným stredom.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Špeciálne k tejto sérii vám odporúčame prečítať si aj text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese `http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf`.

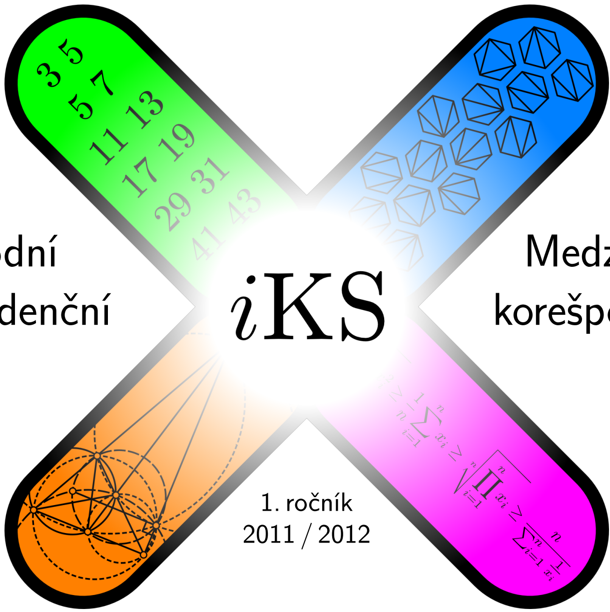
Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **7. november 2011** (pre zahraničie 4. november 2011).
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

Mezinárodní korespondenční seminář

Medzinárodný korešpondenčný seminár



web: *www.kms.sk/iks* e-mail: *iks@kms.sk*

Milý příteli !

Vítej mezi námi! *i*KS je nový korespondenční seminář, na jehož provozu spolupracují organizátoři Matematického korespondenčního semináře KAM MFF UK (*mks.mff.cuni.cz*) a Korešpondenčného matematického seminára (*www.kms.sk*). Nahrazuje bývalou nejtěžší kategorii γ v KMS, je tedy určen zejména pro pokročilé řešitele. Budeme nicméně rádi za každé došlé řešení či jen jeho náznak. Jediná vyřešená úloha již může znamenat slušné umístění!

Během roku bude celkem šest sérií, které budou střídavě zadávat a opravovat organizátoři MKS (liché série) a KMS (sudé série) – **doručovací adresa se tedy střídá**; bude vždy uvedena u zadání série. Svá řešení můžeš psát česky, slovensky, ale i anglicky.

Každá série sestává ze čtyř úloh, které budou pokrývat čtyři základní typy problémů na matematických olympiádách: **algebra** (A), **kombinatorika** (C), **geometrie** (G) a **teorie čísel** (N). Za každou úlohu lze standardně získat 0 – 7 bodů (bodujeme pouze celými čísly), ve výjimečných případech (velmi originální řešení, zajímavé zobecnění úlohy…) může opravovatel udělit až 9 bodů.

Ostatní pravidla *i*KS jsou prakticky totožná s pravidly ostatních korespondenčních seminářů, viz např. *kms.sk/pravidla*. Zdůrazníme zde jen nejpodstatnější věci: každou úlohu sepisuj na **zvláštní papír A4**, v záhlaví uveď své **jméno** a **číslo úlohy**. O tom, zda jsi své řešení poslal včas, rozhoduje razítko na obálce.

Konečně, proč vlastně *i*KS řešit? Především jde o velmi dobrou přípravu na Matematickou olympiádu i mezinárodní matematické soutěže. Nejlepší řešitelé dále získají **hodnotné matematické knihy** dle vlastního výběru, absolutní vítěz navíc **tričko s prestižním nápisem** „Vyhral som *i*KS“! Více naleznete na *www.kms.sk/iks*.

Zadání 1. série

Termín odeslání: 10. října 2011

Adresa pro odeslání: *Korespondenční seminář iKS*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Česká republika

Úloha A1. Najděte nejmenší kladné reálné číslo t s následující vlastností: kdykoliv reálná čísla a, b, c, d splňují $a + b + c + d = 6$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$, lze z těchto čísel vybrat dvě, jejichž rozdíl je v absolutní hodnotě nejvýše t.

Úloha C1. *Mixáží* neuspořádané n-tice celých čísel[1] rozumíme neuspořádanou $\binom{n}{2}$-tici součtů všech dvojic prvků původní n-tice. Ukažte, že pokud mají dvě různé n-tice stejnou mixáž, pak n je mocnina dvojky. Pro každou mocninu dvojky také nalezněte příklad odpovídajících různých n-tic.

Úloha G1. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojme středy všech kružnic připsaných trojúhelníkům ABC, BCD, CDA, DAB (tedy celkem 12 bodů). Dokažte, že všechny tyto body leží na obvodu jednoho obdélníka nebo čtverce.

Úloha N1. Řekneme, že přirozené číslo je *prvoliché*, pokud je součinem lichého počtu (ne nutně různých) prvočísel. O číslu, které není prvoliché, řekneme, že je *prvosudé*. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že čísla n a $n + 1$ jsou obě

(a) prvosudá,

(b) prvolichá.

[1] V n-tici se na rozdíl od množiny mohou čísla opakovat.

Návratka s kontaktními údaji

Pošli prosím vyplněné spolu s první sérií!

Jméno:* Příjmení:*

Zpáteční adresa:*

Škola:*

E-mail:

*Nezbytný údaj