MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie C

1

N1 Rozdiel dvoch kladných prirodzených čísel je rovný 4, pričom jedno z čísel je násobkom druhého. O aké čísla ide?

N2 Číslo 73 rozložte na súčet dvoch kladných prirodzených čísel tak, aby ich podiel bol tiež kladné prirodzené číslo.

N3 Rozhodnite, pre ktoré prirodzené čísla n nadobúda zlomok

$$\frac{4n+1}{2n-3}$$

celočíselnú hodnotu.

D1 Rozhodnite, pre ktoré prirodzené čísla n nadobúda zlomok

$$\frac{n+72}{2n}$$

celočíselnú hodnotu.

D2 Určte všetky zlomky zo zadania súťažnej úlohy, ktoré majú v základnom tvare menovateľ rovný 2.

2

N1 Žiak dostal z desaťminútoviek osemkrát známku 5, šesťkrát známku 4, štyrikrát známku 3 a dvakrát známku 2. Koľko by k tomu ešte musel dostať jednotiek, aby sa priemer jeho známok zlepšil presne o 1?

N2 Žiak dostal z desaťminútoviek najskôr trikrát známku 2, ďalšie jeho známky už boli iba päťky. Koľko ich dostal, ak bol priemer jeho známok horší ako 4,2?

N3 Žiačka mala z desaťminútoviek, ktorých bolo menej ako 15, priemer známok presne 1,75. O koľko známok mohlo ísť?

N4 Žiak tvrdí, že keby z ďalšej desaťminútovky dostal známku 1, vylepšil by si tak priemer z presne 1,15 na presne 1,12. Je to možné?

D1 Žiak mal z niekoľkých desaťminútoviek priemer známok približne 3,14 (zaokrúhlené na stotiny). Mohlo ísť o 8 známok?

3

N1 Použitím podobných trojuholníkov odvoďte známu vlastnosť stredných priečok všeobecného trojuholníka ABC: Ak je M stred strany AB a N stred strany AC, tak $MN \parallel BC$ a $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$.

N2 Sú dané rovnobežky p, q a bod S, ktorý na nich neleží. Na priamke p sú dané tri rôzne body A, B, C. Priesečníky priamky q s priamkami SA, SB, SC sú označené postupne D, E, F. Dokážte rovnosti

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|SA|}{|SD|} = \frac{|SB|}{|SE|} = \frac{|SC|}{|SF|}.$$

N3 Použite Tálesovu vetu na dôkaz tvrdenia: Os pravého uhla v rôznostrannom pravouhlom trojuholníku rozpoľuje uhol medzi jeho výškou k prepone a ťažnicou k prepone.

D1 Vrchol C štvorcov $ABCD$ a $CJKL$ je vnútorným bodom úsečky AK aj úsečky DJ. Body E, F, G a H sú postupne stredy úsečiek BC, BK, DK a DC. Vyjadrite obsah štvoruholníka $EFGH$ pomocou obsahov S a T štvorcov $ABCD$ a $CJKL$.

D2 V rovine je daný pravouhlý trojuholník ABC taký, že kružnica k so stredom A a polomerom $|AC|$ pretína preponu AB v jej strede S. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku BCS je zhodná s kružnicou k.

D3 V lichobežníku $ABCD$ so základňami AB, CD označíme P priesečník vnútorných uhlov pri vrcholoch A, D a Q priesečník vnútorných uhlov pri vrcholoch B, C. Dokážte, že body P a Q ležia na jednej rovnobežke so základňami lichobežníka.

4

N1 Žiačka roztrhla list papiera na tri kúsky, potom niektoré z týchto kúskov opäť roztrhla každý na tri kúsky atď. Rozhodnite, ktoré počty kúskov 4, 5, 6, …, 20 mohla týmto postupom získať.

N2 Na tabuli je napísaných

a) 5 písmen R a 5 písmen S,

b) 25 písmen R a 30 písmen S.

V každom kroku zotrieme dve napísané písmená a nahradíme ich písmenom R, resp. S, ak boli zotreté písmená rôzne, resp. rovnaké. Ktoré písmeno zostane na tabuli posledné?

N3 Na tabuli sú napísané 3 jednotky, 3 dvojky a 3 trojky. V každom kroku je povolené zotrieť ľubovoľné dve rôzne cifry a pripísať namiesto nich zostávajúcu tretiu cifru. Po sérii takýchto úprav sa nám podarilo dôjsť k situácii, keď na tabuli zostala jediná cifra, a to dvojka. Mohlo sa stať, že pri inom priebehu úprav by sme došli k inej jedinej cifre? Zmení sa odpoveď pri iných východiskových počtoch cifier?

D1 Na tabuli sú napísané prirodzené čísla od 1 do 100. V každom kroku zotrieme trojicu po sebe idúcich čísel (ak existuje taká trojica). Môžu na tabuli zostať nakoniec čísla, ktorých celkový súčet bude 111?

D2 Vráťme sa k situácii z úlohy N3 so všeobecnými východiskovými počtami cifier. Rozhodnite, či je možné, aby sme dvoma odlišnými postupmi úprav došli raz k jedinej cifre 1 a druhýkrát k jedinej cifre 3.

5

N1 V pravidelnom päťuholníku $ABCDE$ narysujeme osi všetkých jeho strán a osi všetkých jeho uhlopriečok. Koľko rôznych priamok to bude? Vysvetlite, prečo každá z nich je osou súmernosti celého päťuholníka a prechádza jedným jeho vrcholom.

N2 Dokážte, že každé štyri vrcholy pravidelného päťuholníka tvoria vrcholy rovnoramenného lichobežníka.

N3 Rovnobežné úsečky KL a MN neležia na jednej priamke. Dokážte, že trojuholníky KLM a KLN majú rovnaký obsah.

D1 V pravidelnom päťuholníku $ABCDE$ označme G priesečník uhlopriečky AC a BD. Ukážte, že štvoruholník $AGDE$ je kosoštvorec.

D2 Dokážte, že dve uhlopriečky pravidelného päťuholníka, ktoré vychádzajú z jedného jeho vrcholu, rozdeľujú príslušný vnútorný uhol na tretiny.

D3 Označme a dĺžku strany a u dĺžku uhlopriečky daného pravidelného päťuholníka. Dokážte, že $a^2 + au = u^2$.

6

N1 Ukážte, že z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ je možné vybrať 4 rôzne čísla tak, aby medzi nimi nebolo žiadne prvočíslo ani dve čísla, ktorých súčet je prvočíslo. Nájdite tiež všetky také výbery.

N2 Ukážte, že pre každé prirodzené číslo n, kde $n \geq 2$, je možné z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ vybrať $n - 1$ čísel tak, aby medzi nimi nebolo žiadne prvočíslo ani dve čísla, ktorých súčet je prvočíslo.

D1 Ukážte, že počet všetkých šesťciferných prvočísel neprevyšuje 300 000.

D2 Nájdite najväčšie trojciferné číslo, z ktorého po vyškrtnutí ľubovoľnej cifry dostaneme prvočíslo.

D3 Nanajvýš koľko čísel možno vybrať z množiny $\{1, 2, \dots, 2018\}$ tak, aby rozdiel žiadnych dvoch vybraných čísel nebol prvočíslo?

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie C

1

N1 Rozdiel dvoch kladných prirodzených čísel je rovný 4, pričom jedno z čísel je násobkom druhého. O aké čísla ide?

Riešenie:

Nech a a b sú hľadané čísla, pričom $a > b$. Potom menšie číslo b je deliteľom väčšieho čísla a, a teda aj deliteľom čísla $a - b$, ktoré sa podľa zadania rovná 4. Preto $b \in \{1, 2, 4\}$. Tento poznatok vyplýva aj z toho, že

$$\frac{a}{b} = \frac{b+4}{b} = 1 + \frac{4}{b}.$$

Z toho dostávame riešenia $(5, 1)$, $(6, 2)$, $(8, 4)$.

N2 Číslo 73 rozložte na súčet dvoch kladných prirodzených čísel tak, aby ich podiel bol tiež kladné prirodzené číslo.

Riešenie:

Postupujeme podobne ako v riešení N1: Využijeme napríklad vzťah

$$\frac{a}{b} = \frac{73-b}{b} = \frac{73}{b} - 1$$

a poznatok, že 73 je prvočíslo. Jediné riešenie je potom dvojica $(72, 1)$.

N3 Rozhodnite, pre ktoré prirodzené čísla n nadobúda zlomok

$$\frac{4n+1}{2n-3}$$

celočíselnú hodnotu.

Riešenie:

Z úpravy

$$\frac{4n+1}{2n-3} = \frac{2(2n-3)+7}{2n-3} = 2 + \frac{7}{2n-3}$$

vidíme, že hľadáme práve tie n, pre ktoré je celé (napríklad aj záporné) číslo $2n - 3$ deliteľom čísla 7, t. j. jedným z čísel $1, -1\ 7, -7$. Niektorej z rovníc $2n - 3 = 1$, $2n - 3 = -1$, $2n - 3 = 7$, $2n - 3 = -7$ vyhovujú práve hodnoty z množiny $\{-2, 1, 2, 5\}$, z ktorých záporné -2 musíme kvôli zadaniu vylúčiť.

D1 Rozhodnite, pre ktoré prirodzené čísla n nadobúda zlomok

$$\frac{n+72}{2n}$$

celočíselnú hodnotu.

Riešenie:

Daný zlomok má celočíselnú hodnotu k práve vtedy, keď $n + 72 = 2nk$, čiže keď $72 = n(2k - 1)$. Odtiaľ vidíme, že celé číslo $2k - 1$ je kladné a že je to nepárny deliteľ čísla 72. Preto $2k - 1 \in \{1, 3, 9\}$ a rovnosť $72 = n(2k - 1)$ je potom splnená práve pre n z $\{8, 24, 72\}$.

D2 Určte všetky zlomky zo zadania súťažnej úlohy, ktoré majú v základnom tvare menovateľ rovný 2.

Riešenie:

Budú to práve zlomky s menovateľom $2k$ pre vhodné k od 1 do 1011, ktorých čitateľ $2022 - 2k$ je deliteľný číslom k, nie však číslom $2k$. Ekvivalentne vyjadrené: číslo 2022 je deliteľné číslom k, nie však číslom $2k$. Hľadáme teda tie k od 1 do 1011, ktoré delia číslo 2022, nedelia však číslo 1011. Sú to zrejme iba párne čísla 2, 6 a 674, ktorým zodpovedajú postupne zlomky $\frac{2018}{4}$, $\frac{2010}{12}$ a $\frac{674}{1348}$.

2

N1 Žiak dostal z desaťminútoviek osemkrát známku 5, šesťkrát známku 4, štyrikrát známku 3 a dvakrát známku 2. Koľko by k tomu ešte musel dostať jednotiek, aby sa priemer jeho známok zlepšil presne o 1?

Riešenie:

Potrebný počet jednotiek označme n. Keďže

$$\frac{8 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{8 + 6 + 4 + 2} = \frac{80}{20} = 4,$$

čiže pôvodný priemer má hodnotu 4, po pridaní n jednotiek má byť rovný 3, t. j. má platiť

$$\frac{8 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + n \cdot 1}{8 + 6 + 4 + 2 + n} = \frac{80 + n}{20 + n} = 3,$$

z čoho dostaneme $n = 10$.

N2 Žiak dostal z desaťminútoviek najskôr trikrát známku 2, ďalšie jeho známky už boli iba päťky. Koľko ich dostal, ak bol priemer jeho známok horší ako 4,2?

Riešenie:

Počet pätiek označme n. Má platiť

$$\frac{3 \cdot 2 + n \cdot 5}{3 + n} = \frac{5n + 6}{n + 3} > 4{,}2 = \frac{21}{5}.$$

Ekvivalentnou úpravou dostávame $n > \frac{33}{4}$, takže $n \geq 9$. Pätiek teda bolo aspoň 9.

N3 Žiačka mala z desaťminútoviek, ktorých bolo menej ako 15, priemer známok presne 1,75. O koľko známok mohlo ísť?

Riešenie:

Označme p počet známok a s ich súčet. Platí

$$\frac{s}{p} = 1{,}75 = \frac{175}{100} = \frac{7}{4}.$$

Keďže posledný zlomok je v základnom tvare, musí byť $s = 7k$ a $p = 4k$ pre vhodné kladné prirodzené číslo k. Platí teda $4k = p < 15$, t. j. $k < \frac{15}{4}$, čiže $k \in \{1, 2, 3\}$. Mohlo teda ísť o 4, 8 alebo 12 známok.

N4 Žiak tvrdí, že keby z ďalšej desaťminútovky dostal známku 1, vylepšil by si tak priemer z presne 1,15 na presne 1,12. Je to možné?

Riešenie 1:

Pri starom priemere 1,15 čiže $\frac{23}{20}$ by bol počet známok p násobkom čísla 20, pri novom priemere 1,12 čiže $\frac{28}{25}$ by bol počet známok $p + 1$ násobkom čísla 25. Obe čísla p a $p + 1$ však nemôžu byť súčasne násobky 5. Nie je to teda možné.

Riešenie 2:

Pri počte známok p s priemerom 1,15 by bol ich súčet $1{,}15p$, po obdržaní novej jednotky by potom malo platiť

$$\frac{1{,}15p + 1}{p + 1} = 1{,}12.$$

Táto rovnica má síce riešenie $p = 4$, pôvodný súčet známok $1{,}15p$ je však potom 4,6, čo nie je celé číslo.

D1 Žiak mal z niekoľkých desaťminútoviek priemer známok približne 3,14 (zaokrúhlené na stotiny). Mohlo ísť o 8 známok?

Riešenie:

Označme p počet známok a s ich súčet. Hodnota podielu s/p leží v intervale $[3{,}135, 3{,}145)$, takže celé číslo s leží v intervale $[3{,}135p, 3{,}145p)$. V prípade $p = 8$ však ide o interval $[25{,}08, 25{,}16)$, ktorý neobsahuje žiadne prirodzené číslo. Známok teda nemohlo byť 8.

3

N1 Použitím podobných trojuholníkov odvoďte známu vlastnosť stredných priečok všeobecného trojuholníka ABC: Ak je M stred strany AB a N stred strany AC, tak $MN \parallel BC$ a $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$.

Riešenie:

Keďže $|AM| : |AB| = |AN| : |AC| = 1 : 2$, sú trojuholníky ABC a AMN podobné podľa vety *sus*. Zo zhodnosti ich uhlov ABC a AMN potom vyplýva $MN \parallel BC$ a vďaka podobnostnému pomeru $1 : 2$ platí tiež $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$.

N2 Sú dané rovnobežky p, q a bod S, ktorý na nich neleží. Na priamke p sú dané tri rôzne body A, B, C. Priesečníky priamky q s priamkami SA, SB, SC sú označené postupne D, E, F. Dokážte rovnosti

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|SA|}{|SD|} = \frac{|SB|}{|SE|} = \frac{|SC|}{|SF|}.$$

Riešenie:

Vďaka zhodnosti vrcholových a súhlasných či striedavých uhlov sú podľa vety *uu* navzájom podobné trojuholníky SAB a SDE, rovnako ako trojuholníky SAC a SDF, ako aj trojuholníky SBC a SEF. Vďaka stranám týchto trojuholníkov so spoločným krajným bodom S majú všetky tri podobnosti rovnaký koeficient rovný posledným trom zlomkom v dokazovanej sérii rovností. Prvé tri zlomky vyjadrujú tento koeficient pre strany protiľahlé k vrcholu S dotyčných trojuholníkov.

N3 Použite Tálesovu vetu na dôkaz tvrdenia: Os pravého uhla v rôznostrannom pravouhlom trojuholníku rozpoľuje uhol medzi jeho výškou k prepone a ťažnicou k prepone.

Riešenie:

Nech v trojuholníku ABC s obvyklým označením uhlov platí $\gamma = 90°$ a $\beta < \alpha$, t. j. $\beta < 45°$. Označme S stred prepony AB a P pätu výšky z vrcholu C. Podľa Tálesovej vety v trojuholníku SCB platí $|SC| = |SB|$, teda $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle SCB| = \beta$. V pravouhlom trojuholníku ACP zase máme $|\sphericalangle ACP| = 90° - |\sphericalangle PCA| = 90° - \alpha = \beta$. Uhly BCS a ACP, ktoré ležia v pravom uhle ACB, tak majú rovnakú veľkosť β menšiu než $45°$, a preto sa neprekrývajú, a tak os celého uhla ACB je súčasne aj osou súmernosti jeho „zvyšnej" časti medzi uhlami BCS a ACP, t. j. osou uhla SCP.

D1 Vrchol C štvorcov $ABCD$ a $CJKL$ je vnútorným bodom úsečky AK aj úsečky DJ. Body E, F, G a H sú postupne stredy úsečiek BC, BK, DK a DC. Vyjadrite obsah štvoruholníka $EFGH$ pomocou obsahov S a T štvorcov $ABCD$ a $CJKL$.

Riešenie:

55. ročník, C-S-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=240).

D2 V rovine je daný pravouhlý trojuholník ABC taký, že kružnica k so stredom A a polomerom $|AC|$ pretína preponu AB v jej strede S. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku BCS je zhodná s kružnicou k.

Riešenie:

51. ročník, C-S-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=280).

D3 V lichobežníku $ABCD$ so základňami AB, CD označíme P priesečník vnútorných uhlov pri vrcholoch A, D a Q priesečník vnútorných uhlov pri vrcholoch B, C. Dokážte, že body P a Q ležia na jednej rovnobežke so základňami lichobežníka.

Riešenie:

Stred M ramena AD leží na osi o pásu medzi rovnobežkami AB a CD. Keďže súčet uhlov BAD a ADC je vďaka vzťahu $AB \parallel CD$ rovný $180°$, súčet polovičných uhlov PAD a ADP je rovný $90°$, teda PAD je pravouhlý trojuholník s preponou AD so stredom M. Podľa Tálesovej vety je PAM rovnoramenný trojuholník so základňou PA, takže uhol MPA je zhodný s uhlom PAM, a teda aj s uhlom PAB. Zo zhodnosti (striedavých) uhlov MPA a PAB vyplýva $MP \parallel AB$, teda M leží na osi o. Analogickou úvahou o strede N ramena BC zistíme, že na osi o leží aj bod Q.

4

N1 Žiačka roztrhla list papiera na tri kúsky, potom niektoré z týchto kúskov opäť roztrhla každý na tri kúsky atď. Rozhodnite, ktoré počty kúskov 4, 5, 6, …, 20 mohla týmto postupom získať.

Riešenie:

Celkový počet kúskov sa každým roztrhnutím jedného z nich zväčší o 2, možno teda získať ľubovoľný nepárny počet, ale žiadny párny.

N2 Na tabuli je napísaných

a) 5 písmen R a 5 písmen S,

b) 25 písmen R a 30 písmen S.

V každom kroku zotrieme dve napísané písmená a nahradíme ich písmenom R, resp. S, ak boli zotreté písmená rôzne, resp. rovnaké. Ktoré písmeno zostane na tabuli posledné?

Riešenie:

Počet písmen R sa po každom kroku buď nezmení (ak zotrieme dve R či po jednom R a S), alebo sa zmenší o 2 (ak zotrieme dve R), takže zostane po každom počte krokov nepárny, a preto nikdy neklesne na nulu. Keďže sa po jednom kroku celkový počet písmen na tabuli zníži, po konečnom počte krokov zostane na tabuli v oboch prípadoch ako posledné písmeno R.

N3 Na tabuli sú napísané 3 jednotky, 3 dvojky a 3 trojky. V každom kroku je povolené zotrieť ľubovoľné dve rôzne cifry a pripísať namiesto nich zostávajúcu tretiu cifru. Po sérii takýchto úprav sa nám podarilo dôjsť k situácii, keď na tabuli zostala jediná cifra, a to dvojka. Mohlo sa stať, že pri inom priebehu úprav by sme došli k inej jedinej cifre? Zmení sa odpoveď pri iných východiskových počtoch cifier?

Riešenie:

Skúmajme aktuálny súčet všetkých cifier na tabuli. Pri zámene $(1, 2) \to 3$ sa nezmení, pri zámene $(1, 3) \to 2$ sa zmenší o 2 a pri zámene $(2, 3) \to 1$ sa zmenší o 4. Vidíme, že aktuálny súčet všetkých cifier nemení svoju paritu. Nemôžeme teda z toho istého východiskového stavu dôjsť niekedy k jedinej párnej cifre, inokedy k jedinej nepárnej cifre.

D1 Na tabuli sú napísané prirodzené čísla od 1 do 100. V každom kroku zotrieme trojicu po sebe idúcich čísel (ak existuje taká trojica). Môžu na tabuli zostať nakoniec čísla, ktorých celkový súčet bude 111?

Riešenie:

Súčet troch po sebe idúcich čísel $n + (n + 1) + (n + 2)$ čiže $3(n + 1)$ je deliteľný tromi, takže súčet čísel na tabuli po každom kroku klesne o násobok troch. Jeho zvyšok pri delení 3 sa teda nezmení. Na začiatku máme súčet $1 + 2 + \cdots + 100$ čiže 5050 so zvyškom 1 po delení 3, číslo 111 však má zvyšok 0. Odpoveď je teda negatívna.

D2 Vráťme sa k situácii z úlohy N3 so všeobecnými východiskovými počtami cifier. Rozhodnite, či je možné, aby sme dvoma odlišnými postupmi úprav došli raz k jedinej cifre 1 a druhýkrát k jedinej cifre 3.

Riešenie:

N3 a D2 majú spoločné riešenie:

Označíme počet jednotiek, dvojok a trojok na tabuli postupne j, d, t a ukážeme, že pri úpravách nemení paritu žiadny zo súčtov $j + d$, $j + t$ a $d + t$. Dodajme, že v riešení N3 sme využili paritu súčtu $j + 2d + 3t$, ktorá je rovnaká ako parita súčtu $j + t$.

Takže nie je to možné.

5

N1 V pravidelnom päťuholníku $ABCDE$ narysujeme osi všetkých jeho strán a osi všetkých jeho uhlopriečok. Koľko rôznych priamok to bude? Vysvetlite, prečo každá z nich je osou súmernosti celého päťuholníka a prechádza jedným jeho vrcholom.

Riešenie:

Bude to 5 priamok. Stačí ukázať, že napríklad strana AB a uhlopriečka CE majú spoločnú os, ktorá prechádza zvyšným piatym vrcholom D. Vyjdeme z toho, že BCD, CDE a DEA sú zhodné rovnoramenné trojuholníky s hlavnými vrcholmi postupne C, D, E. Odvodíme, že os uhla CDE je spoločnou osou úsečiek CE a AB: Pre prvú z nich to vyplýva z rovnoramenného trojuholníka CDE, pre druhú z trojuholníka BDA, ktorý je rovnako rovnoramenný, lebo vďaka zhodným trojuholníkom BCD a DEA platí $|BD| = |DA|$ a navyše $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle EDA|$.

N2 Dokážte, že každé štyri vrcholy pravidelného päťuholníka tvoria vrcholy rovnoramenného lichobežníka.

Riešenie:

Vyplýva to z riešenia N1: Ukázali sme tam, že os súmernosti celého päťuholníka prechádzajúca vrcholom D je spoločnou osou úsečiek AB a CE, takže to sú základne rovnoramenného lichobežníka $ABCE$ – druhé dve protiľahlé strany BC a EA sú totiž zhodné.

N3 Rovnobežné úsečky KL a MN neležia na jednej priamke. Dokážte, že trojuholníky KLM a KLN majú rovnaký obsah.

Riešenie:

Z podmienky $KL \parallel MN$ vyplýva, že výšky na spoločnú stranu KL oboch trojuholníkov KLM a KLN sú zhodné. Pre ne tak do vzorca pre obsah všeobecného trojuholníka dosadíme rovnaké hodnoty dĺžky základne a na ňu kolmej výšky.

D1 V pravidelnom päťuholníku $ABCDE$ označme G priesečník uhlopriečky AC a BD. Ukážte, že štvoruholník

$AGDE$ je kosoštvorec.

Riešenie:

Z lichobežníkov $ACDE$ a $BDEA$ (pozri výsledok N2) vyplýva $AG \parallel DE$ a $GD \parallel EA$, takže $AGDE$ je rovnobežník. Vďaka $|DE| = |EA|$ ide o kosoštvorec.

D2 Dokážte, že dve uhlopriečky pravidelného päťuholníka, ktoré vychádzajú z jedného jeho vrcholu, rozdeľujú príslušný vnútorný uhol na tretiny.

Riešenie:

Stačí ukázať, že v pravidelnom päťuholníku $ABCDE$ sú zhodné uhly BAC, CAD a DAE so spoločným vrcholom A, Vnútorné uhly pravidelného päťuholníka majú veľkosť $3 \cdot 180° : 5$ čiže $108°$. Preto uhly pri základniach rovnoramenných trojuholníkov ABC a DEA majú veľkosť $180° - 108° : 2$ čiže $36°$. Vidíme, že oba uhly BAC a DAE majú v porovnaní s uhlom BAE tretinovú veľkosť (lebo $36 : 108 = 1 : 3$), takže tretinovú veľkosť má i tretí uhol CAD.

Poznámka:

Z vlastností stredových a obvodových uhlov v kružnici vyplýva nasledujúce tvrdenie pre ľubovoľné n, kde $n \geq 4$: Všetky uhlopriečky pravidelného n-uholníka vychádzajúce z jedného jeho vrcholu delia jemu príslušný vnútorný uhol na $n - 2$ zhodných častí.

D3 Označme a dĺžku strany a u dĺžku uhlopriečky daného pravidelného päťuholníka. Dokážte, že $a^2 + au = u^2$.

Riešenie:

V pravidelnom päťuholníku $ABCD$ označme G priesečník uhlopriečky AC a BD. Podľa úlohy N2 je $DABC$ rovnoramenný lichobežník ($DA \parallel BC$), takže trojuholníky DAG a BCG sú podľa vety *uu* podobné. Platí preto $|DA| : |BC| = |DG| : |GB|$, čiže $u : a = |DG| : |GB|$. Podľa úlohy D1 je $AGDE$ kosoštvorec o strane a, takže platí $|DG| = a$ a $|GB| = |BD| - |DG| = u - a$. Dosadením do $u : a = |DG| : |GB|$ dostaneme $u : a = a : (u - a)$, odkiaľ už ľahko vyplýva rovnosť $a^2 + au = u^2$.

Poznámka:

$u : a = a : (u - a)$ znamená, že bod G delí každú z uhlopriečok AC a BD v tzv. *zlatom reze*.

6

N1 Ukážte, že z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ je možné vybrať 4 rôzne čísla tak, aby medzi nimi nebolo žiadne prvočíslo ani dve čísla, ktorých súčet je prvočíslo. Nájdite tiež všetky také výbery.

Riešenie:

Musí ísť o 4 čísla z množiny $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$, ktorá má 6 prvkov. Číslo 1 nemôže byť vo výbere s tromi číslami 4, 6 a 10, preto je „nepoužiteľné“. To isté platí aj pre číslo 9 pre podobnú kolíziu s tromi číslami 4, 8 a 10. Do úvahy tak prichádzajú iba štyri párne čísla 4, 6, 8 a 10. Ich výber vyhovuje, pretože súčet každých dvoch z nich je tiež párne číslo rôzne od 2.

N2 Ukážte, že pre každé prirodzené číslo n, kde $n \geq 2$, je možné z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ vybrať $n - 1$ čísel tak, aby medzi nimi nebolo žiadne prvočíslo ani dve čísla, ktorých súčet je prvočíslo.

Riešenie:

Výber bude mať požadovanú vlastnosť, ak bude napríklad zostavený z párnych zložených čísel. Spĺňa to výber $n - 1$ čísel 4, 6, 8, …, $2n$.

D1 Ukážte, že počet všetkých šesťciferných prvočísel neprevyšuje 300 000.

Riešenie:

Šesťciferné sú čísla od 100 000 do 999 999, je ich celkom 900 000. Stačí teda ukázať, že aspoň 600 000 z nich je deliteľných dvoma alebo troma. Deliteľných dvoma je ich 450 000, deliteľných troma 300 000. V súčte $450\,000 + 300\,000$ sú však započítané dvakrát čísla, ktoré sú deliteľné dvoma aj troma, t. j. čísla deliteľné šiestimi. Tých je 150 000, takže dvoma alebo troma je deliteľných práve $750\,000 - 150\,000$ čiže 600 000 šesťciferných čísel.

Poznámka:

Podobne zistíme, že existuje 660 000 šesťciferných zložených čísel, ktoré sú deliteľné 2, 3 alebo 5, teda počet šesťciferných prvočísel neprevyšuje 240 000. Aj tento odhad je však veľmi hrubý – presný počet šesťciferných prvočísel je 68 906.

D2 Nájdite najväčšie trojciferné číslo, z ktorého po vyškrtnutí ľubovoľnej cifry dostaneme prvočíslo.

Riešenie:

Je to číslo 731 (pozri 67. ročník, úlohu C-S-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=2618)).

D3 Nanajvýš koľko čísel možno vybrať z množiny $\{1, 2, \dots, 2018\}$ tak, aby rozdiel žiadnych dvoch vybraných čísel nebol prvočíslo?

Riešenie:

Je ich 505 (pozri 67. ročník, úlohu B-II-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=2753)).