MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Návodné a doplňujúce úlohy
k úlohám domáceho kola kategórie B

1 Budeme sa zaoberať iba námetom zo súťažnej úlohy.

N1 Po koľkých krokoch bude tabuľa prázdna, ak je na nej na začiatku napísaná pätica najmenších kladných celých čísel?

N2 Koľko najmenej prirodzených čísel môže byť na tabuli napísaných, ak chceme, aby tabuľa zostala prázdna až po dvoch krokoch?

N3 Vyriešte variant súťažnej úlohy, v ktorom budeme podčiarkovať a následne zotierať práve tie čísla, ktoré nie sú *súčinom* žiadnych dvoch rôznych čísel napísaných na tabuli.

D1 Na začiatku môžeme na tabuľu napísať ľubovoľnú sedmicu rôznych kladných celých čísel obsahujúcu čísla 1 a 2. Nájdite všetky také sedmice, pre ktoré po troch krokoch tabuľa ešte nebude prázdna.

D2 Ako by sa zmenili závery súťažnej úlohy, ak by na začiatku bolo napísaných na tabuli akýchkoľvek desať navzájom rôznych *celých* čísel?

D3 Majme nejakú východiskovú desaticu rôznych kladných celých čísel, pre ktorú po štyroch krokoch tabuľa ešte nebude prázdna. Môže byť najväčšie číslo z takej desatice 35?

2

N1 Tabuľka 3×3 je vyplnená rôznymi celými číslami tak, že súčty troch čísel v každom riadku aj stĺpci sú nepárne čísla. Môžu byť v tabuľke

a) čísla od 1 do 9,

b) čísla od 2 do 10?

N2 Nech $k > 1$ je celé číslo. Majme danú tabuľku s k políčkami, ktorú máme vyplniť k danými a navzájom rôznymi číslami (tak, aby každé z nich bolo použité). Dokážte, že počet všetkých takýchto vyplnení je $k!$.

N3 Riešte súťažnú úlohu pre tabuľku 2×2 a čísla od 1 do 4.

D1 Koľkými spôsobmi možno z n guľôčok rôznych farieb vybrať niektorých k, kde $0 \leq k \leq n$?

D2 Riešte súťažnú úlohu pre tabuľku 4×4 a celé čísla od 1 do 16.

D3 Do každého políčka štvorcovej tabuľky $n \times n$ vpíšeme jedno z čísel 1, 2, …, n tak, aby v každom riadku aj v každom stĺpci boli buď všetky čísla rovnaké, alebo všetky navzájom rôzne. Príkladom pre prípad $n = 5$ je nasledujúca tabuľka:

5	4	1	2	3
3	3	3	3	3
4	1	2	5	3
1	2	5	4	3
2	5	4	1	3

Koľko rôznych hodnôt môže mať súčet všetkých čísel tabuľky?

D4 Je dané celé číslo n, kde $n \geq 2$. Koľkými spôsobmi je možné vyfarbiť políčka tabuľky $n \times n$ štyrmi farbami tak, aby v každom štvorčeku 2×2 bola každá farba použitá práve raz?

3

N1 Rozhodnite, pre ktoré reálne hodnoty parametra p je

$$(p + 2)x^2 + 2(p + 1)x + (p - 1) = 0$$

kvadratická rovnica s dvojnásobným koreňom.

N2 Nech reálne čísla r, s, t spĺňajú sústavu $r^2 = 8st$ a $s^2 = rt$. Ukážte, že $r = 2s$. Rozmyslite si, ako tento výsledok využiť na riešenie súťažnej úlohy, keď za r, s, t zvolíte vhodné výrazy.

D1 Nájdite všetky kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ také, že ak ľubovoľný z koeficientov a, b, c zväčšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, ktorý bude mať dvojnásobný koreň.

D2 V obore reálnych čísel r, s, t riešte sústavu dvoch rovníc z úlohy N2.

D3 Navzájom rôzne nenulové reálne čísla a, b, c sa dajú šiestimi spôsobmi doplniť ako koeficienty kvadratickej rovnice

$$\square x^2 + \square x + \square = 0.$$

a) Rozhodnite, či existuje trojica (a, b, c) taká, že všetky zostavené rovnice majú aspoň jeden reálny koreň.

b) Rozhodnite, či existuje trojica (a, b, c) taká, že práve päť zo šiestich zostavených rovníc má aspoň jeden reálny koreň.

D4 a) Dokážte nerovnosť $4(a^2 + b^2) > (a + b)^2 + ab$ pre všetky dvojice kladných reálnych čísel a, b.

b) Nájdite najmenšie reálne číslo k také, aby nerovnosť $k(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2+ab$ platila pre všetky dvojice kladných reálnych čísel a, b.

D5 Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\frac{1}{x+y} + z = 1,$$

$$\frac{1}{y+z} + x = 1,$$

$$\frac{1}{z+x} + y = 1.$$

4

N1 Zdôvodnite, že päťuholník $ABCDE$ zo súťažnej úlohy je možné získať z istého rovnobežníka „odstrihnutím“ jedného jeho „rohu“.

N2 Pripomeňme, že osou ľubovoľného (konvexného aj nekonvexného) uhla s vrcholom V nazývame tú polpriamku s počiatočným bodom P, ktorá daný uhol rozdeľuje na dva zhodné uhly. Pripomeňte si tiež a dokážte „vetu o osi uhla“: *Os uhla AVB, ktorý má veľkosť menšiu ako* $180°$*, je tvorená práve tými jeho bodmi, ktoré majú od oboch priamok VA, VB rovnakú vzdialenosť.*

N3 Kružnicou pripísanou (ku) strane KL všeobecného trojuholníka KLM rozumieme tú kružnicu, ktorá sa dotýka strany KL v jej vnútornom bode a priamok KM, LM v bodoch ležiacich vo vnútri polroviny opačnej k polrovine KLM. Dokážte, že stred takej kružnice je priesečníkom osí vonkajších uhlov pri vrcholoch K, L trojuholníka KLM a že ním prechádza aj os jeho vnútorného uhla pri vrchole M.

D1 Dokážte, že pre päťuholník $ABCDE$ zo súťažnej úlohy platí $|\sphericalangle CDE| > 60°$.

D2 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s najdlhšou stranou BC. Vnútri strán AB a AC ležia postupne body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F taký bod, že $ABFC$ je rovnobežník. Ukážte, že $|FD| = |FE|$.

D3 V trojuholníku ABC označme I stred kružnice vpísanej. Priamky BI, CI pretnú kružnicu opísanú trojuholníku ABC postupne v bodoch S, T, pričom $S \neq B$, $T \neq C$. Úsečka ST pretína strany AB, AC v bodoch K, L. Dokážte, že štvoruholník $AKIL$ je kosoštvorec.

D4 V ostrouhlom trojuholníku ABC sú D a E vnútorné body strany BC, pritom D leží medzi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Predpokladajme, že os uhla DAE má s osou úsečky BC jediný spoločný bod, ktorý označíme F. Dokážte rovnosť $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DFE| = 180°$.

5

N1 Existuje nejaká trojica (a, b, c) kladných celých čísel spĺňajúcich podmienky $ab = c^2$ a $a + b - 2c = 1$? Ak áno, ako by sa dala využiť na riešenie časti a) súťažnej úlohy pre ľubovoľné prvočíslo p?

N2 Dokážte, že ak pre kladné celé čísla u, v, w platí $u^2 = v^2 w$, tak číslo w je druhou mocninou kladného celého čísla.

N3 Dokážte, že ak súčin dvoch nesúdeliteľných celých kladných čísel u, v je rovný druhej mocnine celého čísla, sú obe čísla u, v tiež druhými mocninami celých čísel.

D1 Pre dané prvočíslo p nájdite *všetky* trojice (a, b, c) kladných celých čísel spĺňajúcich obe rovnosti $ab = c^2$ a $a + b - 2c = p$.

D2 Pravouhlý trojuholník má celočíselné dĺžky strán a obvod 11990. Navyše vieme, že jedna jeho odvesna má prvočíselnú dĺžku. Určte ju.

D3 Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + 145p^2$.

D4 Určte všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + p^3$.

D5 Kladné celé čísla a, b spĺňajú rovnosť $b^2 = a^2 + ab + b$. Dokážte, že b je druhou mocninou kladného celého čísla.

6

N1 Na kružnici so stredom O sú dané body B a C také, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Zvoľme bod A na dlhšom oblúku BC a nech $\delta = |\sphericalangle AOB|$.

a) Zistite veľkosť uhla BAC, keď $\delta = 140°$.

b) Zistite, ako máme voliť uhol δ, aby bol uhol BAC čo najväčší.

c) Na kratšom oblúku BC zvolíme bod D. Zistite, ako máme voliť polohy bodov A, D, aby $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BDC|$ bolo čo najväčšie.

N2 Majme daný konvexný štvoruholník $PQRS$. Dokážte, že jeho vrcholy ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle PSQ|$.

N3 V trojuholníku ABC označme I stred kružnice vpísanej a α veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A. Vyjadrite veľkosť uhla BIC pomocou α.

N4 V pravouhlom trojuholníku ABC označíme M stred prepony AC a α veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A. Vyjadrite pomocou α veľkosti všetkých vnútorných uhlov v trojuholníkoch ABM a BCM.

D1 Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Nech D je ľubovoľný vnútorný bod odvesny AC a p kolmica z bodu D na preponu AB. Označme E bod priamky p rôzny od D a taký, že body A, B, D, E ležia na kružnici. Označme ešte F priesečník priamok p a BC. Dokážte, že $|AE| = |AF|$.

D2 Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník taký, že $AD \perp BD$. Označme M priesečník jeho uhlopriečok a zostrojme kolmý priemet P bodu M na priamku AB a kolmý priemet Q bodu B na priamku AC. Dokážte, že bod M je stredom kružnice vpísanej trojuholníku PQD.

D3 Dokážte, že stredy kružníc zvonka pripísaných jednotlivým stranám ľubovoľného konvexného štvoruholníka ležia na jednej kružnici.

(Kružnicou pripísanou napríklad strane AB konvexného štvoruholníka $ABCD$ rozumieme kružnicu, ktorá sa dotýka strany AB a polpriamok opačných k polpriamkam AD a BC.)

D4 Daná je kružnica k a jej priemer AB. Vnútri úsečky AB zvolíme ľubovoľný bod C a potom na kružnici k vyberieme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Os uhla ABD pretína kružnicu k v bode E rôznom od bodu B. Dokážte, že trojuholníky AEC a CBD sú podobné.

D5 Označme I stred kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole A. Ďalej označme M a N stredy úsečiek AB a BI. Dokážte, že priamka CI je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku BMN.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie B

1 Budeme sa zaoberať iba námetom zo súťažnej úlohy.

N1 Po koľkých krokoch bude tabuľa prázdna, ak je na nej na začiatku napísaná pätica najmenších kladných celých čísel?

Riešenie:

Po dvoch krokoch. V prvom kroku zotrieme čísla 1 a 2, v druhom kroku zvyšné čísla 3, 4, 5.

N2 Koľko najmenej prirodzených čísel môže byť na tabuli napísaných, ak chceme, aby tabuľa zostala prázdna až po dvoch krokoch?

Riešenie:

Ak budú na tabuli najviac dve čísla, bude tabuľa zrejme prázdna hneď po prvom kroku. Tri napísané čísla niekedy k dvom krokom vedú – všeobecne je to trojica (a, b, c), kde $c = a + b$.

Podrobnejšie: Ak chceme, aby tabuľa po prvom kroku ešte nebola prázdna, musí byť niektoré z napísaných čísel c súčtom niektorých ďalších čísel a a b spĺňajúcich $a \neq b$. Keďže v rovnosti $c = a + b$ sú všetky čísla kladné, máme okrem $a \neq b$ tiež $c > a$ a $c > b$. Na tabuli teda musia byť napísané aspoň tri čísla, ako napr. $(1, 2, 3)$.

N3 Vyriešte variant súťažnej úlohy, v ktorom budeme podčiarkovať a následne zotierať práve tie čísla, ktoré nie sú *súčinom* žiadnych dvoch rôznych čísel napísaných na tabuli.

Riešenie:

Ak je na tabuli číslo 1, bude v prvom kroku zotreté ako jediné. Inak v každom kroku budú medzi zotretými dve najmenšie čísla – výnimkou môže byť len posledný krok, ak bude pri ňom na tabuli jediné číslo. Z uvedených poznatkov už vyplýva, že tabuľa bude prázdna po najviac 6 krokoch. Po 5 krokoch ešte prázdna byť nemusí, ako ukazuje príklad východiskových čísel 1, 2, 3, 6, 18, …, kde každé číslo počnúc štvrtým je rovné súčinu dvoch čísel predchádzajúcich. Hľadaný najväčší počet krokov je teda 5.

D1 Na začiatku môžeme na tabuľu napísať ľubovoľnú sedmicu rôznych kladných celých čísel obsahujúcu čísla 1 a 2. Nájdite všetky také sedmice, pre ktoré po troch krokoch tabuľa ešte nebude prázdna.

Riešenie:

Takéto sedmice sú štyri: $(1, 2, 3, 4, 7, 10, 17)$, $(1, 2, 3, 4, 7, 11, 18)$, $(1, 2, 3, 5, 8, 11, 19)$, $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21)$.

V každom kroku musíme zotrieť iba dve najmenšie čísla. Usporiadajme čísla vzostupne. Tretie číslo tak musí byť $1 + 2 = 3$, štvrté $1 + 3 = 4$ alebo $2 + 3 = 5$. Podobne po číslach 3, 4 musia nasledovať čísla 7, 10 alebo 7, 11 a po číslach 3, 5 čísla 8, 11 alebo 8, 13. Posledné siedme číslo musí byť súčtom piateho a šiesteho čísla.

D2 Ako by sa zmenili závery súťažnej úlohy, ak by na začiatku bolo napísaných na tabuli akýchkoľvek desať navzájom rôznych *celých* čísel?

Riešenie:

Už tvrdenie z časti a) by prestalo platiť – uvážte napríklad desaticu $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, v ktorej žiadne číslo nepodčiarkneme, a teda ani nezotrieme.

D3 Majme nejakú východiskovú desaticu rôznych kladných celých čísel, pre ktorú po štyroch krokoch tabuľa ešte nebude prázdna. Môže byť najväčšie číslo z takej desatice 35?

Riešenie:

Môže:

$$(\underline{1}, \underline{2}, 3, 4, 7, 10, 11, 17, 18, 35) \to (\underline{3}, \underline{4}, 7, 10, 11, 17, 18, 35) \to (\underline{7}, \underline{10}, \underline{11}, 17, 18, 35) \to (\underline{17}, \underline{18}, 35) \to (\underline{35}).$$

2

N1 Tabuľka 3×3 je vyplnená rôznymi celými číslami tak, že súčty troch čísel v každom riadku aj stĺpci sú nepárne čísla. Môžu byť v tabuľke

a) čísla od 1 do 9,

b) čísla od 2 do 10?

Riešenie:

a) áno, b) nie.

V prípade a) napríklad môžeme nepárnymi číslami, ktorých je 5, zaplniť prvý riadok a prvý stĺpec. Keďže $2 + 3 + \cdots + 10$ čiže 54 je párne číslo, musí byť v prípade b) párny súčet čísel v aspoň jednom riadku (aj v aspoň jednom stĺpci).

N2 Nech $k > 1$ je celé číslo. Majme danú tabuľku s k políčkami, ktorú máme vyplniť k danými a navzájom rôznymi číslami (tak, aby každé z nich bolo použité). Dokážte, že počet všetkých takýchto vyplnení je $k!$.

Riešenie:

Označme políčka číslami od 1 do k a vyberajme pre ne čísla postupne takto: najskôr pre políčko 1, potom pre políčko 2 atď., až nakoniec pre políčko k. Počty možností týchto výberov budú postupne k, $k-1$, …, 1. Celkový počet vyplnení dostaneme, keď uvedené počty možností medzi sebou vynásobíme.

N3 Riešte súťažnú úlohu pre tabuľku 2×2 a čísla od 1 do 4.

Riešenie:

Medzi číslami od 1 do 4 sú dve nepárne a dve párne, takže všetky riadkové a stĺpcové súčty budú nepárne, keď nepárne čísla 1 a 3 nebudú ležať ani v rovnakom riadku ani stĺpci, t. j. budú na jednej z oboch diagonál. Vybrať diagonálu pre čísla 1, 3 môžeme dvoma spôsobmi, umiestniť na ňu čísla 1, 3 dvoma spôsobmi a na druhú diagonálu čísla 2, 4 tiež dvoma spôsobmi. Celkom tak existuje práve $2 \cdot 2 \cdot 2$ čiže 8 vyplnení, ktoré vyhovujú zadaniu. Keďže podľa N2 je počet všetkých vyplnení rovný 4! čiže 24, hľadaný pomer je $8 : 24$ čiže $1 : 3$.

D1 Koľkými spôsobmi možno z n guľôčok rôznych farieb vybrať niektorých k, kde $0 \leq k \leq n$?

Riešenie:

Vyberajme týchto k guľôčok jednu po druhej. V prvom kroku máme n možností, v druhom $n-1$ možností atď., až v k. kroku máme $n-k+1$ možností. Uvedomme si, že ak vyberieme tie isté guľôčky v inom poradí, dostaneme rovnaký výsledný výber. Možných poradí k guľôčok je podľa N2 práve $k!$. Hľadaný počet k-tíc je preto rovný $\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ čiže $\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$, čo je $\binom{n}{k}$.

D2 Riešte súťažnú úlohu pre tabuľku 4×4 a celé čísla od 1 do 16.

Riešenie:

Zrejme $M = 16!$. Ukážme ďalej, že pre počet N tých vyplnení, kde sú súčty všetkých čísel v každom riadku aj stĺpci nepárne čísla, platí $N = 144 \cdot 8! \cdot 8!$. Odtiaľ už $N : M = 144 \cdot 8! \cdot 8!/16! = 8 : 715$.

Medzi číslami od 1 do 16 je práve 8 nepárnych čísel. V každom riadku musí byť buď jedno, alebo tri nepárne čísla. Celkom ich je 8, preto ľahko zistíme, že v dvoch riadkoch r_1, r_2 musia byť tri nepárne čísla a vo zvyšných dvoch riadkoch r_3, r_4 jedno nepárne číslo. Rovnaký záver platí aj pre stĺpce – v dvoch stĺpcoch s_1, s_2 musia byť tri nepárne čísla a vo zvyšných dvoch stĺpcoch s_3, s_4 jedno nepárne číslo.

Ukážme, že vo štvorici políčok daných prienikom riadkov r_1, r_2 so stĺpcami s_1, s_2 sú len nepárne čísla. Označme ich počet x. Keďže v riadkoch r_1 a r_2 je dokopy 6 nepárnych čísel, čo platí aj pre stĺpce s_1 a s_2, máme $2 \cdot 6 - x \leq 8$, odkiaľ $x \geq 4$, t. j. naozaj $x = 4$. Spomínaná štvorica políčok tak obsahuje štyri nepárne čísla. Ostatné dve nepárne čísla z riadkov r_1 a r_2 sa potom nachádzajú po jednom v stĺpcoch s_3 a s_4, pre výber ich pozícií tak máme 2 možnosti. To isté platí pre ostatné dve nepárne čísla zo stĺpcov s_1 a s_2: Pre výber ich pozícií v riadkoch r_3 a r_4 máme taktiež 2 možnosti. Tým máme popísané možné vyhovujúce pozície všetkých 8 nepárnych čísel.

Celkový počet vyhovujúcich výberov pozícií nepárnych a párnych čísel preto vypočítame takto: Najskôr zvolíme ľubovoľne dvojicu riadkov s_1, s_2 (6 možností) a dvojicu stĺpcov r_1, r_2 (6 možností), potom vykonáme výbery pre pozície nepárnych čísel vo dvojiciach stĺpcov s_3, s_4 a r_3, r_4 (pre každý z oboch výberov máme, ako vieme, 2 možnosti). Počet vyhovujúcich výberov pozícií pre nepárne a párne čísla je teda $6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2$ čiže 144. Odtiaľ už vyplýva $N = 144 \cdot 8! \cdot 8!$, pretože 8 pozícií pre nepárne čísla rovnako ako 8 pozícií pre párne čísla môžeme vyplniť 8! spôsobmi.

D3 Do každého políčka štvorcovej tabuľky $n \times n$ vpíšeme jedno z čísel 1, 2, …, n tak, aby v každom riadku aj v každom stĺpci boli buď všetky čísla rovnaké, alebo všetky navzájom rôzne. Príkladom pre prípad $n = 5$ je nasledujúca tabuľka:

5	4	1	2	3
3	3	3	3	3
4	1	2	5	3
1	2	5	4	3
2	5	4	1	3

Koľko rôznych hodnôt môže mať súčet všetkých čísel tabuľky?

Riešenie:

MO, Česko, 50. ročník, B-I-3, https://www.matematickaolympiada.cz/media/440634/B50i.pdf.

D4 Je dané celé číslo n, kde $n \geq 2$. Koľkými spôsobmi je možné vyfarbiť políčka tabuľky $n \times n$ štyrmi farbami tak, aby v každom štvorčeku 2×2 bola každá farba použitá práve raz?

Riešenie:

Vyfarbime najprv prvý riadok a prvý stĺpec tak, aby v žiadnom štvorci 2×2 nebola žiadna farba použitá viackrát. Začnime políčkom v ľavom hornom rohu – na jeho vyfarbenie máme 4 možnosti. Potom postupne vyfarbujme prvý stĺpec zhora nadol – v každom kroku máme na výber z troch farieb. Nakoniec vyfarbíme prvý riadok zľava doprava – v prvom kroku máme iba 2 možnosti zafarbenia, vo zvyšných krokoch máme 3 možnosti. Celkový počet vyhovujúcich zafarbení prvého riadku a prvého stĺpca je preto $4 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 \cdot 3^{n-2}$, t. j. $2^3 \cdot 3^{2n-3}$. To je výsledok úlohy, pretože každé také zafarbenie je možné rozšíriť na vyhovujúce zafarbenie celej tabuľky práve jedným spôsobom. Naozaj, len čo poznáme farby troch políčok niektorého štvorčeka 2×2, farba štvrtého políčka je jednoznačne určená. Také dofarbovanie môžeme vykonať napríklad tak, že zľava doprava dofarbíme $n - 1$ štvorčekov najprv v druhom riadku, potom v treťom riadku atď. až nakoniec v n. riadku. Využijeme pritom všetkých $(n-1)^2$ štvorčekov 2×2 v danej šachovnici, takže získané zafarbenie je vyhovujúce.

3

N1 Rozhodnite, pre ktoré reálne hodnoty parametra p je

$$(p+2)x^2 + 2(p+1)x + (p-1) = 0$$

kvadratická rovnica s dvojnásobným koreňom.

Riešenie:

Ak $p = -2$, nejde o kvadratickú rovnicu. Ak $p \neq -2$, má táto kvadratická rovnica dvojnásobný koreň práve vtedy, keď je jej diskriminant nulový. Ten je pritom $(2(p+1))^2 - 4(p+2)(p-1)$, po úprave $4(p+3)$, čo je rovné nule iba pre $p = -3$.

N2 Nech reálne čísla r, s, t spĺňajú sústavu $r^2 = 8st$ a $s^2 = rt$. Ukážte, že $r = 2s$. Rozmyslite si, ako tento výsledok využiť na riešenie súťažnej úlohy, keď za r, s, t zvolíte vhodné výrazy.

Riešenie:

Ak vynásobíme prvú rovnicu r, dostávame $r^3 = 8rst$. Na pravej strane potom môžeme nahradiť rt za s^2 vďaka druhej rovnici. Dostaneme $r^3 = 8s^3 = (2s)^3$, z čoho $r = 2s$. Použitie na riešenie súťažnej úlohy tu prezrádzať nebudeme.

D1 Nájdite všetky kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ také, že ak ľubovoľný z koeficientov a, b, c zväčšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, ktorý bude mať dvojnásobný koreň.

Riešenie:

MO, 53. ročník, B-II-2, https://skmo.sk/dokument.php?id=258.

D2 V obore reálnych čísel r, s, t riešte sústavu dvoch rovníc z úlohy N2.

Riešenie:

Podľa N2 platí $r = 2s$. Po dosadení takého r získajú rovnice tvar $4s^2 = 8st$ a $s^2 = 2st$. Vidíme, že v prípade $s = 0$ platí $r = 2s = 0$ a t je ľubovoľné. V prípade $s \neq 0$ sa obe rovnice $4s^2 = 8st$ a $s^2 = 2st$ zjednodušia na $s = 2t$, takže $r = 2s = 4t$, a teda $(r, s, t) = (4t, 2t, t)$, kde t je ľubovoľné.

D3 Navzájom rôzne nenulové reálne čísla a, b, c sa dajú šiestimi spôsobmi doplniť ako koeficienty kvadratickej rovnice

$$\square x^2 + \square x + \square = 0.$$

a) Rozhodnite, či existuje trojica (a, b, c) taká, že všetky zostavené rovnice majú aspoň jeden reálny koreň.

b) Rozhodnite, či existuje trojica (a, b, c) taká, že práve päť zo šiestich zostavených rovníc má aspoň jeden reálny koreň.

Riešenie:

MO, Česko, 69. ročník, B-II-1, http://www.matematickaolympiada.cz/media/6510496/b69ii.pdf.

D4 a) Dokážte nerovnosť $4(a^2 + b^2) > (a + b)^2 + ab$ pre všetky dvojice kladných reálnych čísel a, b.

b) Nájdite najmenšie reálne číslo k také, aby nerovnosť $k(a^2 + b^2) \geqq (a+b)^2 + ab$ platila pre všetky dvojice kladných reálnych čísel a, b.

Riešenie:

MO, 70. ročník, B-II-1, https://skmo.sk/dokument.php?id=3604.

D5 Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\frac{1}{x+y} + z = 1,$$

$$\frac{1}{y+z} + x = 1,$$

$$\frac{1}{z+x} + y = 1.$$

Riešenie:

MO, 69. ročník, A-II-1, https://skmo.sk/dokument.php?id=3386.

4

N1 Zdôvodnite, že päťuholník $ABCDE$ zo súťažnej úlohy je možné získať z istého rovnobežníka „odstrihnutím“ jedného jeho „rohu“.

Riešenie:

Zadaný konvexný päťuholník leží ako v páse medzi rovnobežkami BC a DE, tak v páse medzi rovnobežkami CD a AE. Preto leží aj v prieniku týchto dvoch pásov, ktorým je rovnobežník $PCDE$, pričom P je priesečník (rôznobežných) priamok BC a AE. Keďže zvyšné vrcholy A, B sú vnútorné body strán PE, resp. PC, od rovnobežníka $PCDE$ oddelíme trojuholník APB.

N2 Pripomeňme, že osou ľubovoľného (konvexného aj nekonvexného) uhla s vrcholom V nazývame tú polpriamku s počiatočným bodom P, ktorá daný uhol rozdeľuje na dva zhodné uhly. Pripomeňte si tiež a dokážte „vetu o osi uhla“: *Os uhla AVB, ktorý má veľkosť menšiu ako* $180°$*, je tvorená práve tými jeho bodmi, ktoré majú od oboch priamok VA, VB rovnakú vzdialenosť.*

Riešenie:

Stačí uvažovať len vnútorné body uhla AVB, nech X je ľubovoľný z nich. Nech $\alpha = |\sphericalangle AVX|$ a $\beta = |\sphericalangle XVB|$, potom platí $\alpha + \beta < 180°$ a bod X má od priamok VA, VB vzdialenosti $|VX| \sin \alpha$, resp. $|VX| \sin \beta$. Tie sa preto rovnajú práve vtedy, keď platí $\sin \alpha = \sin \beta$, čo pre konvexné uhly nastane len v dvoch prípadoch: $\alpha = \beta$ alebo $\alpha + \beta = 180°$. Druhý z nich je však vyššie vylúčený a prvý prípad znamená práve to, že X je vnútorným bodom osi uhla AVB.

N3 Kružnicou pripísanou (ku) strane KL všeobecného trojuholníka KLM rozumieme tú kružnicu, ktorá sa dotýka strany KL v jej vnútornom bode a priamok KM, LM v bodoch ležiacich vo vnútri polroviny opačnej k polrovine KLM. Dokážte, že stred takej kružnice je priesečníkom osí vonkajších uhlov pri vrcholoch K, L trojuholníka KLM a že ním prechádza aj os jeho vnútorného uhla pri vrchole M.

Riešenie:

Priesečník S spomínaných dvoch osí vonkajších uhlov je vnútorným bodom uhla KML ležiacim v polrovine opačnej k polrovine KLM a má podľa N2 rovnakú vzdialenosť v od všetkých troch priamok KM, KL a LM, teda (opäť vďaka N2) leží aj na osi uhla KML. Kružnica so stredom S a polomerom v je potom zrejme pripísaná strane KL trojuholníka KLM.

D1 Dokážte, že pre päťuholník $ABCDE$ zo súťažnej úlohy platí $|\sphericalangle CDE| > 60°$.

Riešenie:

Nech P je priesečník priamok BC a AE. Potom $PCDE$ je rovnobežník s bodmi A, B vo vnútri strán PE, resp. PC. Nech $\alpha = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$, $\beta = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$ a $\delta = |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle EPC|$. Z trojuholníka APB máme $(180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta) + \delta = 180°$, z čoho vyplýva rovnosť $\alpha + \beta = 90° + \frac{1}{2}\delta$. Ak porovnáme v trojuholníku ADE vnútorný uhol pri vrchole A s vonkajším uhlom pri vrchole E, dostaneme $\alpha < \delta$. Rovnako tak z trojuholníka BCD dostaneme $\beta < \delta$. Sčítaním dvoch odvodených nerovností vychádza $\alpha+\beta < 2\delta$, takže z rovnosti $\alpha + \beta = 90° + \frac{1}{2}\delta$ vyplýva $90° + \frac{1}{2}\delta < 2\delta$, odkiaľ $\delta > 60°$, čo sme mali dokázať.

D2 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s najdlhšou stranou BC. Vnútri strán AB a AC ležia postupne body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F taký bod, že $ABFC$ je rovnobežník. Ukážte, že $|FD| = |FE|$.

Riešenie:

MO, 71. ročník, B-I-2, https://skmo.sk/dokument.php?id=3924.

D3 V trojuholníku ABC označme I stred kružnice vpísanej. Priamky BI, CI pretnú kružnicu opísanú trojuholníku ABC postupne v bodoch S, T, pričom $S \neq B$, $T \neq C$. Úsečka ST pretína strany AB, AC v bodoch K, L. Dokážte, že štvoruholník $AKIL$ je kosoštvorec.

Riešenie:

MO, 71. ročník, A-S-2, https://skmo.sk/dokument.php?id=3918.

D4 V ostrouhlom trojuholníku ABC sú D a E vnútorné body strany BC, pritom D leží medzi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Predpokladajme, že os uhla DAE má s osou úsečky BC jediný spoločný bod, ktorý označíme F. Dokážte rovnosť $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DFE| = 180°$.

Riešenie:

MO, 70. ročník, A-II-3, https://skmo.sk/dokument.php?id=3471.

5

N1 Existuje nejaká trojica (a, b, c) kladných celých čísel spĺňajúcich podmienky $ab = c^2$ a $a + b - 2c = 1$? Ak áno, ako by sa dala využiť na riešenie časti a) súťažnej úlohy pre ľubovoľné prvočíslo p?

Riešenie:

Áno, ale prezrádzať ju nebudeme, nieto ešte spôsob, ako by sa dala využiť. Skúste vypísať všetky trojice (a, b, c) kladných celých čísel spĺňajúcich rovnicu $ab = c^2$ pre malé hodnoty c. Vyhovuje niektorá z ich aj druhej podmienke?

N2 Dokážte, že ak pre kladné celé čísla u, v, w platí $u^2 = v^2w$, tak číslo w je druhou mocninou kladného celého čísla.

Riešenie:

Uvážme ľubovoľné prvočíslo p deliace číslo w. Z rovnosti $u^2 = v^2w$ vyplýva, že p je aj deliteľ čísla u, takže číslo u^2 má vo svojom rozklade na prvočinitele párny počet výskytov p, ktorý však musí byť väčší ako prípadný párny počet výskytov p v rozklade čísla v^2. Odtiaľ už vyplýva, že p má párny počet výskytov aj v rozklade čísla w, ktoré je teda druhou mocninou kladného celého čísla (platí to aj v prípade $w = 1$).

N3 Dokážte, že ak súčin dvoch nesúdeliteľných celých kladných čísel u, v je rovný druhej mocnine celého čísla, sú obe čísla u, v tiež druhými mocninami celých čísel.

Riešenie:

Uvážme rozklady čísel u, v a uv na prvočinitele. V rozklade druhej mocniny rovnej číslu uv má každé prvočíslo párny počet výskytov. Čísla u, v však nemajú žiadne spoločné prvočinitele, preto aj v ich rozkladoch má každé prvočíslo párny počet výskytov (v jednom z rozkladov u, v je to nula, v druhom rovnaký počet ako v rozklade uv).

D1 Pre dané prvočíslo p nájdite *všetky* trojice (a, b, c) kladných celých čísel spĺňajúcich obe rovnosti $ab = c^2$ a $a + b - 2c = p$.

Riešenie:

$\{a, b\} = \{(n + 1)p, np\}$ a $c = n(n + 1)p$, kde n je ľubovoľné prirodzené číslo.

Označme d najväčší spoločný deliteľ čísel a, b. Keďže ab má byť druhou mocninou celého čísla, podľa N2 a N3 platí $a = u^2d$, $b = v^2d$ pre vhodné celé kladné u, v, takže $c = uvd$. Dosadením do $a + b - 2c = p$ po jednoduchej úprave dostávame $d(u - v)^2 = p$. Keďže p je prvočíslo, musí platiť $u - v \in \{-1, 1\}$ a $d = p$. V prípade $u - v = 1$ máme $a = (v + 1)^2p$, $b = v^2p$ a $c = v(v + 1)p$, v prípade $u - v = -1$ podobne $a = u^2p$, $b = (u + 1)^2p$ a $c = u(u + 1)p$.

D2 Pravouhlý trojuholník má celočíselné dĺžky strán a obvod 11990. Navyše vieme, že jedna jeho odvesna má prvočíselnú dĺžku. Určte ju.

Riešenie:

MO, 71. ročník, B-I-1, https://skmo.sk/dokument.php?id=3924.

D3 Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + 145p^2$.

Riešenie:

MO, 55. ročník, C-II-4, https://skmo.sk/dokument.php?id=241.

D4 Určte všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí $p + q^2 = q + p^3$.

Riešenie:

MO, 55. ročník, B-II-1, https://skmo.sk/dokument.php?id=238.

D5 Kladné celé čísla a, b spĺňajú rovnosť $b^2 = a^2 + ab + b$. Dokážte, že b je druhou mocninou kladného celého čísla.

Riešenie:

MO, 69. ročník, A-III-4, https://skmo.sk/dokument.php?id=3448.

6

N1 Na kružnici so stredom O sú dané body B a C také, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Zvoľme bod A na dlhšom oblúku BC a nech $\delta = |\sphericalangle AOB|$.

a) Zistite veľkosť uhla BAC, keď $\delta = 140°$.

b) Zistite, ako máme voliť uhol δ, aby bol uhol BAC čo najväčší.

c) Na kratšom oblúku BC zvolíme bod D. Zistite, ako máme voliť polohy bodov A, D, aby $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BDC|$ bolo čo najväčšie.

Riešenie:

V rovnoramenných trojuholníkoch BOC, COA a AOB vypočítajte veľkosti uhlov alebo ich vyjadrite v závislosti na uhle δ. V časti a) vyjde $|\sphericalangle BAC| = 60°$, rovnako ako v časti b), a to nezávisle na voľbe δ. V časti c) vyjde $180°$ nezávisle od polohy bodu A alebo D.

Poznámka:

Výsledok časti c) má známe zovšeobecnenie: Konvexný štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet veľkostí jeho protiľahlých vnútorných uhlov je $180°$.

N2 Majme daný konvexný štvoruholník $PQRS$. Dokážte, že jeho vrcholy ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle PSQ|$.

Riešenie:

Na úvod konštatujme, že vďaka konvexnosti $PQRS$ ležia vrcholy R, S posudzovaných uhlov PRQ, PSQ vo vnútri tej istej polroviny s hraničnou priamkou PQ. Predpokladajme najprv, že štvoruholník $PQRS$ má všetky štyri vrcholy na jednej kružnici. Rovnosť $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle PSQ|$ je potom rovnosťou dvoch obvodových uhlov tejto kružnice, ktoré prislúchajú tomu istému oblúku PQ.

Predpokladajme naopak, že uhly PRQ a PSQ sú zhodné, a označme φ ich spoločnú veľkosť. Dokážeme, že kružnice opísané trojuholníkom PRQ a PSQ majú rovnaký stred, a tým pádom aj rovnaký polomer. V prípade $\varphi = 90°$ je to dôsledok Tálesovej vety. Posúďme teraz prípad $\varphi < 90°$. Stredy kružníc opísaných trojuholníkom PRQ a PSQ potom ležia vo vnútri polroviny PQR čiže PQS a každý z nich tvorí s bodmi P a Q rovnoramenný trojuholník so základňou PQ, ktorý má podľa vety o obvodovom a stredovom uhle pri hlavnom vrchole uhol 2φ. Preto tieto dva stredy splývajú. V prípade $\varphi > 90°$ potom stredy oboch opísaných kružníc ležia v polrovine opačnej k polrovine $PQR = PQS$ a zodpovedajúce rovnoramenné trojuholníky vtedy majú pri hlavnom vrchole uhol $360° - 2\varphi$.

Poznámka:

Dokázané tvrdenie je okamžitým dôsledkom tzv. *vety o ekvigonále úsečky*: Množina všetkých bodov, z ktorých danú úsečku PQ vidno pod daným uhlom α, pričom $0° < \alpha < 180°$, je tvorená vnútornými bodmi dvoch kružnicových oblúkov s krajnými bodmi P a Q, ktoré sú súmerne združené podľa priamky PQ.

N3 V trojuholníku ABC označme I stred kružnice vpísanej a α veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A. Vyjadrite veľkosť uhla BIC pomocou α.

Riešenie:

Označme postupne β, γ veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch B a C. Keďže bod I leží na osiach oboch týchto uhlov, zo súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku BIC dostávame

$$|\sphericalangle BIC| = 180° - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 90° + \frac{1}{2}\alpha.$$

N4 V pravouhlom trojuholníku ABC označíme M stred prepony AC a α veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A. Vyjadrite pomocou α veľkosti všetkých vnútorných uhlov v trojuholníkoch ABM a BCM.

Riešenie:

Sú to trojice $(\alpha, \alpha, 180° - 2\alpha)$ a $(90° - \alpha, 90° - \alpha, 2\alpha)$. Využite to, že vďaka Tálesovej vete sú oba trojuholníky ABM a BCM rovnoramenné s hlavným vrcholom M.

D1 Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Nech D je ľubovoľný vnútorný bod odvesny AC a p kolmica z bodu D na preponu AB. Označme E bod priamky p rôzny od D a taký, že body A, B, D, E ležia na kružnici. Označme ešte F priesečník priamok p a BC. Dokážte, že $|AE| = |AF|$.

Riešenie:

MO, 70. ročník, B-II-3, https://skmo.sk/dokument.php?id=3604.

D2 Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník taký, že $AD \perp BD$. Označme M priesečník jeho uhlopriečok a zostrojme kolmý priemet P bodu M na priamku AB a kolmý priemet Q bodu B na priamku AC. Dokážte, že bod M je stredom kružnice vpísanej trojuholníku PQD.

Riešenie:

MO, 68. ročník, B-I-5, https://skmo.sk/dokument.php?id=3042.

D3 Dokážte, že stredy kružníc zvonka pripísaných jednotlivým stranám ľubovoľného konvexného štvoruholníka ležia na jednej kružnici.

(Kružnicou pripísanou napríklad strane AB konvexného štvoruholníka $ABCD$ rozumieme kružnicu, ktorá sa dotýka strany AB a polpriamok opačných k polpriamkam AD a BC.)

Riešenie:

MO, 69. ročník, B-S-2, https://skmo.sk/dokument.php?id=3391.

D4 Daná je kružnica k a jej priemer AB. Vnútri úsečky AB zvolíme ľubovoľný bod C a potom na kružnici k vyberieme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Os uhla ABD pretína kružnicu k v bode E rôznom od bodu B. Dokážte, že trojuholníky AEC a CBD sú podobné.

Riešenie:

MO, 68. ročník, B-S-3, https://skmo.sk/dokument.php?id=3046.

D5 Označme I stred kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole A. Ďalej označme M a N stredy úsečiek AB a BI. Dokážte, že priamka CI je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku BMN.

Riešenie:

MO, 70. ročník, A-III-2, https://skmo.sk/dokument.php?id=3576.