61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

1. *Označme n súčet všetkých desaťciferných čísel, ktoré majú vo svojom dekadickom zápise každú z cifier 0, 1, ..., 9. Zistite zvyšok po delení čísla n sedemdesiatimi siedmimi.* (*Pavel Novotný*)

Riešenie. Najskôr vypočítame hodnotu čísla n, potom už jeho zvyšok po delení číslom 77 určíme jednoducho. V zadaní opísané desaťciferné čísla nebudeme sčitovať priamo. Hľadaný súčet ľahšie nájdeme tak, že zistíme, koľkokrát sa ktorá cifra nachádza vo všetkých číslach na mieste jednotiek, desiatok, stoviek, atď. Následne určíme, aký je „príspevok“ každej cifry do celkového súčtu n.

Ak je cifra 1 na mieste jednotiek, potom na zvyšných deväť pozícií môžeme zvyšných deväť cifier rozmiestniť ľubovoľne, akurát na prvú pozíciu nesmieme dať cifru 0. Na prvú pozíciu teda môžeme umiestniť niektorú z ôsmich rôznych cifier (každú okrem 0), následne na druhú pozíciu niektorú z ôsmich rôznych cifier (každú okrem tej, ktorú sme dali na prvé miesto), na tretiu pozíciu niektorú zo siedmich rôznych cifier (každú okrem cifier na prvých dvoch pozíciách), atď. Cifra 1 sa preto na mieste jednotiek nachádza $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot 8!$-krát.[1]

Rovnakou úvahou zistíme, že cifra 1 sa nachádza $8 \cdot 8!$-krát aj na mieste desiatok, stoviek, tisísok, atď. Len na prvej pozícii sa nachádza až $9!$-krát, pretože vtedy na zvyšných deväť pozícií môžeme zvyšných deväť cifier rozmiestniť ľubovoľne – nemáme obmedzenie pre cifru 0.

Takže príspevok cifry 1 do celkového súčtu je

$$\begin{aligned} &8 \cdot 8! + 8 \cdot 8! \cdot 10 + 8 \cdot 8! \cdot 100 + \cdots + 8 \cdot 8! \cdot 10^8 + 9! \cdot 10^9 = \\ &= 8 \cdot 8! \cdot 111\,111\,111 + 9 \cdot 8! \cdot 10^9 = 8! \cdot 9\,888\,888\,888. \end{aligned}$$

Cifra 2 sa zrejme nachádza vo všetkých číslach na jednotlivých pozíciách rovnako veľakrát ako cifra 1, takže jej príspevok do celkového súčtu je dvojnásobný. Príspevok cifry 3 je trojnásobný, príspevok cifry 4 je štvornásobný, atď. Počet výskytov cifry 0 na jednotlivých pozíciách je síce iný ako pri ostatných cifrách, ale nemusíme ho určovať, keďže príspevok cifry 0 do súčtu je nulový. Spolu teda máme

$$n = 8! \cdot 9\,888\,888\,888 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 45 \cdot 8! \cdot 9\,888\,888\,888. \tag{1}$$

Hľadaný zvyšok by sme už teraz mohli určiť vyčíslením hodnoty n a následným delením číslom 77. My sa však vyhneme zdĺhavému násobeniu a deleniu veľkých čísel. Z vyjadrenia (1) vidíme, že n je deliteľné siedmimi (pretože činiteľ $8!$ je násobok siedmich). Keďže $77 = 7 \cdot 11$, zvyšok n po delení sedemdesiatimi siedmimi musí byť násobkom siedmich.

Ešte určíme zvyšok čísla n po delení jedenástimi. Triviálne platí $45 \equiv 1 \pmod{11}$ a ľahko vypočítame, že $8! = 40\,320 \equiv 5 \pmod{11}$. Určenie zvyšku čísla $9\,888\,888\,888$ môžeme urýchliť známym tvrdením: Číslo s dekadickým zápisom $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ dáva

[1] K rovnakému výsledku by sme dospeli aj inou úvahou: Ak by sme cifru 0 pripustili aj na prvej pozícii, všetkých čísel končiacich cifrou 1 by bolo $9!$. Nevyhovujúcich čísel s nulou na prvej pozícii je $8!$. Vyhovujúcich čísel je teda $9! - 8! = 9 \cdot 8! - 8! = 8 \cdot 8!$.

po delení jedenástimi rovnaký zvyšok ako číslo $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k$. Takže dostávame

$$9\,888\,888\,888 \equiv 8 - 8 + 8 - 8 + \dots + 8 - 9 = -1 \equiv 10 \pmod{11}.$$

Spolu máme

$$n = 45 \cdot 8! \cdot 9\,888\,888\,888 \equiv 1 \cdot 5 \cdot 10 = 50 \equiv 6 \pmod{11}$$

(využili sme vlastnosť, že súčin činiteľov dáva rovnaký zvyšok ako súčin zvyškov činiteľov).

Zvyškom po delení čísla n sedemdesiatimi siedmimi je teda číslo z množiny $\{6, 17, 28, 39, 50, 61, 72\}$, ktoré je deliteľné siedmimi, teda číslo 28.

Iné riešenie. Pripusťme, že na prvom mieste môže byť aj nula. Potom medzi všetkými číslami, ktoré majú vo svojom dekadickom zápise každú z cifier 0, 1, ..., 9, sa každá cifra vyskytuje na každom z desiatich miest 9!-krát. Preto je súčet všetkých takých čísel

$$s_1 = 9!(0 + 1 + 2 + \dots + 9) \cdot (1 + 10 + \ldots + 10^9) = 9! \cdot 45 \cdot \frac{10^{10} - 1}{9} = 9! \cdot 5 \cdot (10^{10} - 1).$$

Musíme ale odčítať súčet tých (navyše zarátaných) desaťciferných čísel, ktoré začínajú nulou. To sú vlastne deväťciferné čísla, ktoré majú vo svojom dekadickom zápise každú z cifier 1, 2, ..., 9. Analogicky ako v pred chvíľou odvodíme, že ich súčet je

$$s_2 = 8!(1 + 2 + \dots + 9) \cdot (1 + 10 + \ldots + 10^8) = 8! \cdot 45 \cdot \frac{10^9 - 1}{9} = 8! \cdot 5 \cdot (10^9 - 1).$$

Zrejme $7 \mid s_1$ a $7 \mid s_2$, takže aj $7 \mid s_1 - s_2 = n$. Ďalej s využitím známeho rozkladu $(10^{2k+1} + 1) = (10 + 1)(10^{2k} - 10^{2k-1} + \dots + 1)$ máme

$$\begin{aligned} s_1 &= 9! \cdot 5(10^5 - 1)(10^5 + 1) \equiv 9! \cdot 5(10^5 - 1) \cdot 0 \equiv 0 && \pmod{11}, \\ s_2 &= 8! \cdot 5 \cdot (10^9 - 1) = (8 \cdot 7) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (10^9 + 1 - 2) \equiv \\ &\equiv 1 \cdot (-1) \cdot 30 \cdot (-2) \equiv 5 && \pmod{11}, \end{aligned}$$

čiže $n = s_1 - s_2 \equiv 6 \pmod{11}$. Záver je rovnaký ako pri prvom riešení.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Určte počet všetkých desaťciferných čísel, ktoré majú vo svojom dekadickom zápise každú z cifier 0, 1, ..., 9. [$10! - 9!$]

N2. Učiteľ si myslí číslo. Žiakom prezradil, že jeho číslo končí cifrou 6 a dáva po delení trinástimi zvyšok 9. Určte, aký zvyšok dáva učiteľovo číslo po delení číslom 65. [Učiteľovo číslo n spĺňa $n \equiv 1 \pmod{5}$, $n \equiv 9 \pmod{13}$. Keďže $65 = 5 \cdot 13$, hľadaný zvyšok musí byť z množiny $\{9, 9 + 13, 9 + 26, 9 + 39, 9 + 52\}$. Z týchto čísel jedine $9 + 52 = 61$ dáva správny zvyšok po delení piatimi.]

N3. Dokážte, že číslo s dekadickým zápisom $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ dáva po delení jedenástimi rovnaký zvyšok ako číslo $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k$. [Ak i je párne, tak $10^i = (10^i - 1) + 1 = 9 \dots 9 + 1 = 99 \cdot 10 \dots 101 + 1 \equiv 1 \pmod{11}$. Ak i je nepárne, tak $10^i = 10 \cdot 10^{i-1} \equiv 10 \cdot 1 \equiv -1 \pmod{11}$.]

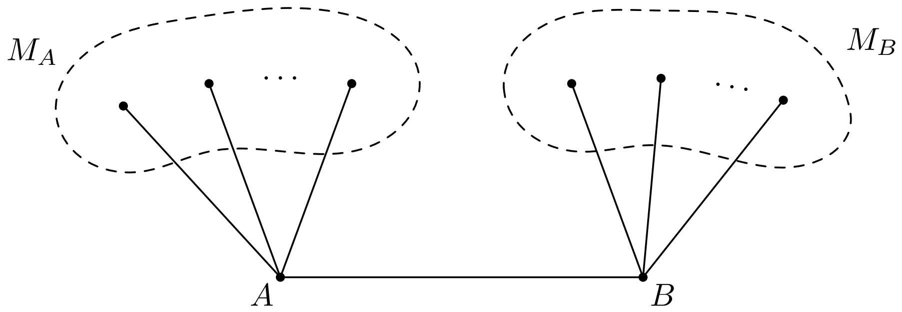
D1. Dokážte, že ak čísla a, b dávajú po delení číslom d postupne zvyšky u, v, tak zvyšky čísel ab, uv po delení d sú rovnaké.

D2. Dokážte, že zvyšky čísel $1, 10, 10^2, 10^3, \dots$ po delení ľubovoľným nepárnym prvočíslom rôznym od 5 tvoria periodickú postupnosť.

2. *Na stretnutí bolo niekoľko ľudí. Každí dvaja, ktorí sa nepoznali, mali medzi ostatnými prítomnými práve dvoch spoločných známych. Účastníci A a B sa poznali, ale nemali ani jedného spoločného známeho. Dokážte, že A aj B mali medzi prítomnými rovnaký počet známych. Ukážte tiež, že na stretnutí mohlo byť práve šesť osôb.*

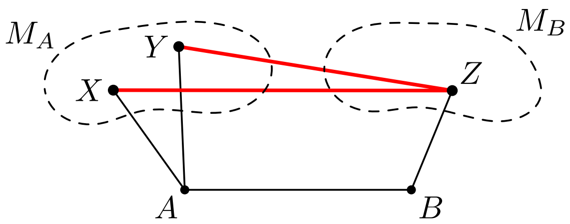
(*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Účastníkov stretnutia budeme znázorňovať plnými krúžkami a to, že sa dvaja ľudia poznajú, budeme znázorňovať spojením príslušných krúžkov čiarou[2]. Zadanú situáciu zakreslíme na obr. 1.

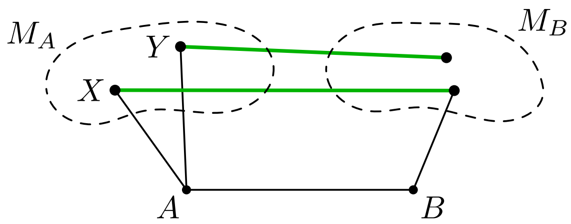


Obr. 1

Množinu známych účastníka A rôznych od B označme M_A a množinu známych účastníka B rôznych od A označme M_B. Ani jeden človek z M_A sa nepozná s B, lebo A a B nemajú spoločného známeho. Takže každý z M_A má s B práve dvoch spoločných známych: jeden z nich je A, druhý sa nachádza medzi zvyšnými známymi účastníka B, teda v M_B. Pritom žiadni dvaja ľudia X, Y z M_A nemôžu poznať toho istého človeka Z v M_B. V opačnom prípade by sa totiž Z nepoznal s A (lebo A, B nemajú spoločných známych) a zároveň by X, Y, B tvorili trojicu ich spoločných známych (obr. 2a), čo je v rozpore so zadaním.



Obr. 2a



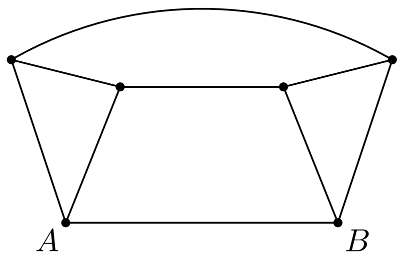
Obr. 2b

Zhrňme ešte raz poznatky odvodené v predošlom odseku: Každý človek z M_A pozná niekoho z M_B a žiadni dvaja ľudia z M_A nepoznajú toho istého v M_B (obr. 2b). Z toho vyplýva, že v množine M_B je aspoň toľko ľudí ako v množine M_A, t. j. $|M_B| \geqq |M_A|$. Tou istou úvahou (po zámene úloh A a B) vieme samozrejme dokázať, že $|M_A| \geqq |M_B|$. Nutne teda $|M_A| = |M_B|$, čiže A a B majú medzi prítomnými rovnaký počet známych.

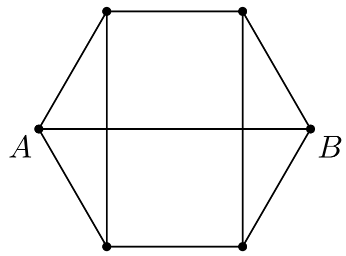
V druhej časti riešenia už len vymyslíme a znázorníme nejaké vyhovujúce rozloženie známostí medzi šesticou osôb, z ktorých dve osoby sú A a B, poznajú sa a nemajú

[2] Takému znázorneniu sa hovorí *graf*; účastníci sú *vrcholy* a známosti sú *hrany* grafu

spoločných známych. Z prvej časti už vieme, že tieto osoby musia mať rovnaký počet známych. Stačí teda napríklad nakresliť spojené osoby A, B, každú z nich spojiť s dvoma ďalšími osobami a medzi štvoricou osôb dokresliť čiary tak, aby bolo splnené zadanie. Ľahko objavíme vyhovujúce rozloženie ako na obr. 3a (ktoré možno prekresliť napr. do tvaru na obr. 3b).



Obr. 3a



Obr. 3b

Iné riešenie. Nech M_A, M_B sú tie isté množiny ako v prvom riešení. Budeme používať pojmy z teórie grafov. Nech M_A obsahuje m vrcholov a M_B obsahuje n vrcholov. Keďže každý vrchol z M_A má s B spoločného známeho A a zároveň nie je známym vrcholu B, musí mať s B práve jedného známeho v M_B (aby bola splnená podmienka zo zadania, že majú práve dvoch spoločných známych). Takže z každého vrcholu v M_A vychádza práve jedna hrana do M_B. Spolu preto vychádza z M_A do M_B práve m hrán. Analogicky z M_B vychádza do M_A práve n hrán. Sú to však tie isté hrany, takže nutne $m = n$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Na stretnutí bolo niekoľko ľudí. Každí dvaja, ktorí sa nepoznali, mali medzi ostatnými prítomnými práve *jedného* spoločného známeho. Nikto sa nepoznal s každým. Účastníci A a B sa poznali, ale nemali ani jedného spoločného známeho. Dokážte, že na stretnutí bola osoba, ktorá nepoznala A ani B. [Ak by A nemal okrem B žiadneho známeho, musel by každý poznať B, čo nevyhovuje zadaniu. Takže A má okrem B aspoň jedného známeho X. Podobne B má okrem A známeho Y. Pritom X a Y sa nemôžu poznať, preto musia mať spoločného známeho Z, ktorý nepozná A ani B.]

D1. Dokážte, že rozloženie na obr. 3a je jediné vyhovujúce rozloženie so šiestimi osobami.

D2. Na stretnutí bolo niekoľko ľudí. Každí dvaja, ktorí sa nepoznali, mali medzi ostatnými prítomnými práve *troch* spoločných známych. Účastníci A a B sa poznali, ale nemali ani jedného spoločného známeho. Dokážte, že A aj B mali medzi prítomnými rovnaký počet známych. [Pri podobných úvahách ako v druhom riešení (z každého vrcholu z M_A vychádzajú práve dve hrany do M_B) dostaneme $2m = 2n$, čiže $m = n$.]

D3. V skupine n žiakov sa spolu niektorí kamarátia. Vieme, že každý má medzi ostatnými aspoň štyroch kamarátov. Učiteľka chce žiakov rozdeliť na dve nanajvýš štvorčlenné skupiny tak, že každý bude mať vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta. a) Ukážte, že v prípade $n = 7$ sa dajú žiaci požadovaným spôsobom vždy rozdeliť. b) Zistite, či možno žiakov takto vždy rozdeliť aj v prípade $n = 8$. [60–C–I–4]

---

3. *Označme S stred kružnice vpísanej, T ťažisko a V priesečník výšok daného rovnoramenného trojuholníka, ktorý nie je rovnostranný.*

a) Dokážte, že bod S je vnútorným bodom úsečky TV.

b) Určte pomer dĺžok strán daného trojuholníka, ak je bod S stredom úsečky TV.

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Označme vrcholy daného trojuholníka písmenami A, B, C tak, aby BC bola základňa. Veľkosti strán a uhlov trojuholníka budeme označovať štandardným spôsobom, t. j. $|BC| = a$, $|AC| = |AB| = b$, $\beta = \gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Nech H je stred základne BC.

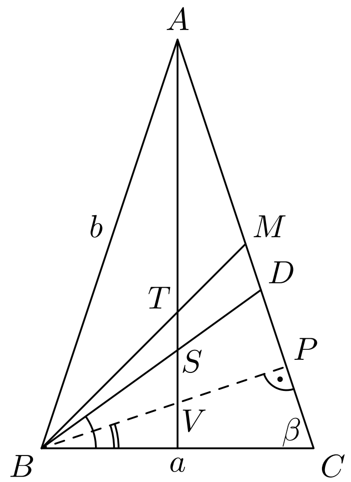
a) Veďme vrcholom B výšku, os uhla a ťažnicu trojuholníka ABC a ich priesečníky s priamkou CA označme postupne P, D a M. Všetky tri ležia na polpriamke CA (body D, M dokonca na úsečke CA). Zrejme stačí dokázať, že bod D je vnútorným bodom úsečky MP. Rozoberieme dva prípady.

Ak $b > a$ (obr. 4a), tak zrejme $\beta > 60^\circ$. Odtiaľ máme

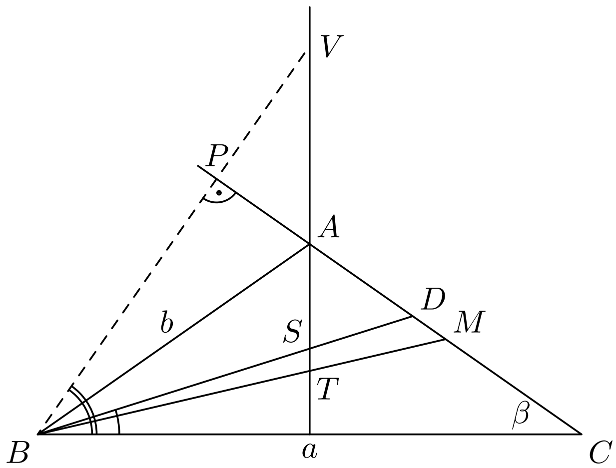
$$|\measuredangle CBP| = 90^\circ - \beta < 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ < \tfrac{1}{2}\beta = |\measuredangle CBD|,$$

takže $|CP| < |CD|$. Os uhla delí stranu trojuholníka v pomere priľahlých strán, preto $|CD|/|AD| = a/b < 1$, odkiaľ $|CD| < \frac{1}{2}|CA| = |CM|$. Spolu teda $|CP| < |CD| < |CM|$, čiže D leží vnútri úsečky MP.

Ak $a > b$ (obr. 4b), tak $\beta < 60^\circ$ a analogicky dostávame $|\measuredangle CBP| = 90^\circ - \beta > 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ > \frac{1}{2}\beta = |\measuredangle CBD|$, $|CD|/|AD| = a/b > 1$, takže $|CP| > |CD| > \frac{1}{2}|CA| = |CM|$, čiže aj v tomto prípade D leží vnútri úsečky MP.



Obr. 4a



Obr. 4b

b) Najskôr vyjadríme dĺžky úsečiek TH, SH, VH pomocou dĺžok strán trojuholníka a pomocou dĺžky $|AH|$, ktorú označme v (obr. 5). Z Pytagorovej vety v trojuholníku ABH máme $v^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2$, takže neskôr budeme vedieť za v dosadiť vyjadrenie len pomocou dĺžok a, b.

Ťažisko T delí ťažnicu AH v pomere $2:1$, takže $|TH| = \frac{1}{3}v$.

Úsečka SH je polomerom vpísanej kružnice, takže jej dĺžku vypočítame zo známeho vzorca $S_{ABC} = \varrho \cdot s$ pre obsah trojuholníka ABC, pričom s označuje polovicu obvodu. Dostávame

$$|SH| = \varrho = \frac{S_{ABC}}{s} = \frac{\frac{1}{2}av}{\frac{1}{2}(a+2b)} = \frac{av}{a+2b}.$$

Trojuholníky BVH a ABH sú podobné, pretože sú oba pravouhlé a $|\measuredangle VBH| = 90^\circ - \beta = \frac{1}{2}\alpha = |\measuredangle BAH|$. Pre prislúchajúce dĺžky strán preto máme $|VH| : |BH| = |BH| : |AH|$, odkiaľ

$$|VH| = \frac{|BH|^2}{|AH|} = \frac{a^2}{4v}.$$

Ak je S stredom úsečky TV, platí $|TS| = |SV|$. Pritom

$$|TS| = \big||TH| - |SH|\big|, \qquad |SV| = \big||SH| - |VH|\big| \tag{1}$$

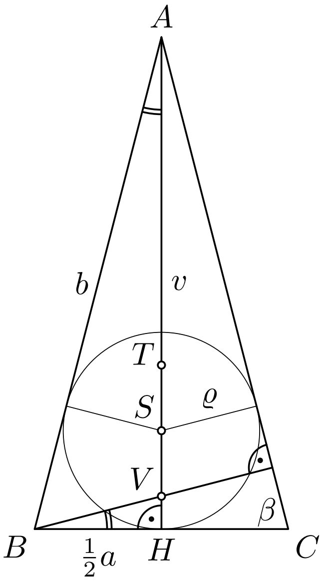
a z časti a) vieme, že rozdiely v absolútnych hodnotách v (1) sú buď oba kladné, alebo oba záporné. Rovnosť $|TS| = |SV|$ je teda ekvivalentná s rovnosťou

$$|TH| - |SH| = |SH| - |VH|, \qquad \text{čiže} \qquad |TH| + |VH| = 2|SH|.$$

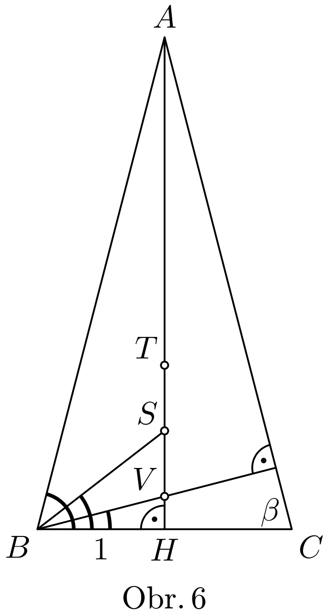
Dosadením odvodených dĺžok po ekvivalentných úpravách dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}v + \frac{a^2}{4v} &= \frac{2av}{a+2b},\\
4v^2(a+2b) + 3a^2(a+2b) &= 24av^2,\\
3a^2(a+2b) &= 4v^2(5a-2b),\\
3a^2(a+2b) &= 4(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)(5a-2b),\\
3a^2(a+2b) &= (2b+a)(2b-a)(5a-2b),\\
3a^2 &= (2b-a)(5a-2b),\\
3a^2 &= 12ab - 5a^2 - 4b^2,\\
2a^2 - 3ab + b^2 &= 0,\\
(2a-b)(a-b) &= 0.
\end{aligned}$$

Keďže podľa zadania je $a \neq b$, bod S je stredom úsečky TV práve vtedy, keď $2a = b$, teda keď pomer dĺžok strán trojuholníka je $1 : 2 : 2$.



Obr. 5



Obr. 6

Iné riešenie. a) Keďže S, T, V sú vnútorné body polpriamky HA (body S, T sú dokonca vnútorné body úsečky HA), stačí ukázať, že oba rozdiely $|HS| - |HT|$ a $|HV| - |HS|$ sú nenulové a majú rovnaké znamienko.

Bez ujmy na všeobecnosti nech $a = 2$, t.j. $|BH| = |HC| = 1$. Z pravouhlých trojuholníkov BSH, BAH a BVH dostávame (obr. 6)

$$|HS| = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad |HT| = \frac{|HA|}{3} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{3} \quad \text{a} \quad |HV| = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Vďaka vzťahu $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ pri označení $t = \operatorname{tg}\frac12\beta$ máme

$$|HS| - |HT| = t - \frac{2t}{3(1-t^2)} = \frac{t(1-3t^2)}{3(1-t^2)},$$
$$|HV| - |HS| = \frac{1-t^2}{2t} - t = \frac{1-3t^2}{2t}.$$

Keďže β je ostrý uhol rôzny od 60°, platí $\frac12\beta \in (0^\circ, 45^\circ)$ a $\frac12\beta \neq 30^\circ$, odkiaľ pre hodnotu $t = \operatorname{tg}\frac12\beta$ vyplývajú vzťahy $0 < t < 1$ a $3t^2 \neq 1$, takže oba skúmané rozdiely sú buď kladné (ak $\beta < 60^\circ$), alebo záporné (ak $\beta > 60^\circ$).

b) Podiel rozdielov z časti a) má vyjadrenie

$$\frac{|HS| - |HT|}{|HV| - |HS|} = \frac{t(1-3t^2)}{3(1-t^2)} \cdot \frac{2t}{1-3t^2} = \frac{2t^2}{3(1-t^2)}.$$

V obore $(0, 1)$ riešime rovnicu

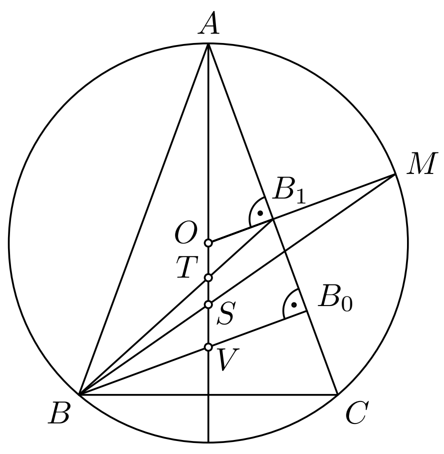
$$\frac{2t^2}{3(1-t^2)} = 1,$$

ktorá tam má zrejme jediný koreň

$$t = \sqrt{\tfrac35}, \quad \text{odkiaľ} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{2t}{1-t^2} = \sqrt{15}.$$

Teda v trojuholníku BHA okrem $|BH| = 1$ platí $|HA| = \operatorname{tg}\beta = \sqrt{15}$, takže podľa Pytagorovej vety máme $|BA| = \sqrt{1+15} = 4$. Strany trojuholníka ABC sú teda v pomere $2 : 4 : 4$, čiže $1 : 2 : 2$.

Iné riešenie. a) Označme vrcholy daného trojuholníka rovnako ako v prvom riešení, ďalej O stred opísanej kružnice, B_0 pätu výšky z vrcholu B a B_1 stred strany AC. Keďže os uhla pri vrchole B pretína oblúk CA opísanej kružnice v jeho strede M (obr. 7), je zrejmé, že vďaka podmienke $O \neq V$ (ktorá je ekvivalentná s tým, že daný trojuholník nie je rovnostranný) pretne táto os stranu AC vnútri úsečky B_0B_1, a teda bod S leží vnútri úsečky TV.



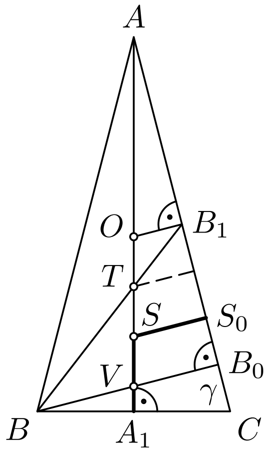
Obr. 7

b) Využijeme známu vlastnosť troch základných bodov trojuholníka: ťažiska T, stredu O opísanej kružnice a priesečníka V výšok. Uvedené tri body ležia totiž na priamke v ľubovoľnom trojuholníku, pričom ťažisko T vždy delí úsečku OV v pomere $1:2$.[3] Ak teda stred S kružnice vpísanej trojuholníku ABC rozpoľuje úsečku TV, delia body T a S (v tomto poradí) orientovanú úsečku OV na tri zhodné časti.

Pre kolmé priemety B_1, S_0 a B_0 bodov O, S a V na stranu AC (obr. 8) preto platí

$$CB_1 = CB_0 + 3(CS_0 - CB_0) = 3CS_0 - 2CB_0.$$

Ak uvedenú rovnosť chápeme ako rovnosť orientovaných úsečiek (alebo vektorov) na priamke CA, vyhneme sa nutnosti rozlišovať, či je uhol pri vrchole A väčší alebo menší ako $60°$, pretože ako už vieme, na poradie spomenutých bodov to nemá vplyv.



Obr. 8

Do odvodenej rovnosti teraz môžeme dosadiť $\frac{1}{2}b$ za CB_1, $\frac{1}{2}a$ za CS_0 ($|CS_0| = |CA_1|$ je dĺžka úsekov oboch dotyčníc z vrcholu C ku kružnici vpísanej trojuholníku ABC) a napokon z dvoch podobných pravouhlých trojuholníkov BCB_0 a ACA_1 (zhodujú sa v spoločnom uhle BCA) vychádza $CB_0 = \frac{1}{2}a^2/b$. Dostávame tak

$$\frac{b}{2} = \frac{3a}{2} - \frac{a^2}{b}, \quad \text{čiže} \quad b^2 - 3ab + 2a^2 = 0.$$

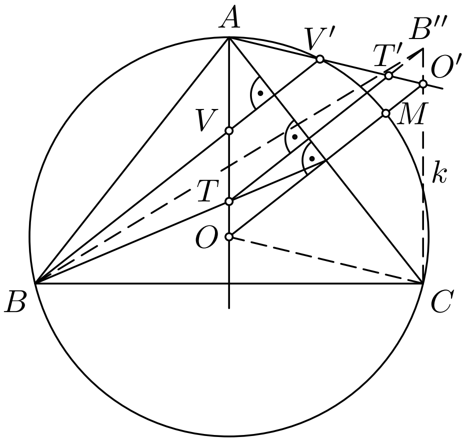
Poslednú rovnosť možno prepísať ako $(b-a)(b-2a) = 0$, a keďže $a \neq b$, musí byť $b = 2a$.

Iné riešenie. Časť a) už nebudeme znovu dokazovať, použijeme rovnaký postup aj označenie ako v predošlom riešení.

b) Najskôr ukážeme, že v trojuholníku, v ktorom je pri vrchole A uhol väčší ako $60°$, nemôže os uhla stredom úsečky VT vôbec prechádzať. Na to využijeme známu vlastnosť priesečníka výšok: jeho obraz V' v osovej súmernosti podľa strany AC leží na kružnici k

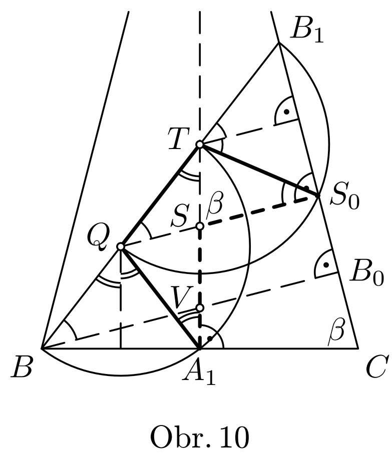
[3] Uvedená vlastnosť jednoducho vyplýva z toho, že trojuholník $A_1B_1C_1$ tvorený strednými priečkami daného trojuholníka ABC je jeho obrazom v rovnoľahlosti so stredom v ťažisku a koeficientom $-\frac{1}{2}$. A keďže os každej zo strán trojuholníka ABC je zároveň výškou trojuholníka $A_1B_1C_1$, je stred O kružnice opísanej danému trojuholníku ABC zároveň priesečníkom výšok trojuholníka $A_1B_1C_1$, takže bod O je v uvedenej rovnoľahlosti obrazom bodu V a $|TO| = \frac{1}{2}|TV|$.

trojuholníku ABC opísanej (obr. 9). Keďže za uvedeného predpokladu ležia body T a O (v tomto poradí) na polpriamke AO až za bodom V, ležia zrejme obrazy T', O' bodov T, O v uvedenej osovej súmernosti vo vonkajšej oblasti kružnice k. V jej vonkajšej oblasti leží však aj obraz B'' vrcholu B v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky VT: bod B'' je totiž priesečníkom polpriamok TT' a CO', pretože CO' je zároveň kolmá na BC ($AOCO'$ je kosoštvorec) a je tak obrazom priamky AO v rovnoľahlosti so stredom B a koeficientom 2. Uhlopriečka BB'' rovnobežníka $BTB''V$ (na ktorej leží ťažnica trojuholníka BTV) preto určite pretne kružnicu k vnútri pásu rovnobežiek BV a TT'. Os uhla pri vrchole B však pretína kružnicu k v strede M príslušného oblúka AC a priamka OM leží mimo spomenutého pásu.



Obr. 9

Predpokladajme teda, že v danom trojuholníku je pri vrchole A uhol menší ako $60°$ a že stred S vpísanej kružnice rozpoľuje úsečku VT. Označme Q stred úsečky BT, S_0 bod dotyku vpísanej kružnice so stranou AC. Teda $|SA_1| = |SS_0|$. Bod S_0 leží zrejme na Tálesovej kružnici s priemerom QB_1 a zároveň bod A_1 leží na Tálesovej kružnici s priemerom BT (obr. 10), takže $|S_0T| = |TQ| = |QA_1|$. Trojuholníky STS_0 a SQA_1 sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle oproti jednej z nich. Oba trojuholníky preto majú zhodné opísané kružnice a pre ich uhly pri vrcholoch T, resp. Q oproti zhodným tetivám SS_0 a SA_1 zodpovedajúcich kružníc platí, že sú buď zhodné, alebo doplnkové (t. j. ich súčet dáva $180°$).



Obr. 10

Ak sú oba uhly zhodné, ležia body A_1, S_0, T, Q na kružnici, a keďže $|QA_1| = |TS_0|$, je A_1S_0TQ lichobežník alebo pravouholník, takže úsečka A_1S_0 je rovnobežná s QT, a je teda strednou priečkou trojuholníka BCB_1. Trojuholník A_1S_0C je rovnoramenný, preto je rovnoramenný aj trojuholník BB_1C. Odtiaľ ihneď vyplýva, že $b = 2a$.

Ukážeme teraz, že vďaka predpokladu $\alpha < 60°$ nemôže druhá možnosť nastať, teda že súčet oboch uhlov STS_0 a SQA_1 je menší ako $180°$. Na obr. 10 sú vyznačené jednoduchým oblúčikom uhly, ktoré sa zhodujú s uhlom SQT (všade sa jedná o súhlasné uhly alebo o uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka). Podobne dva oblúčiky vyznačujú uhly zhodné s uhlom STQ. Z trojuholníka STQ navyše vyplýva, že $|\measuredangle SQT| + |\measuredangle STQ| = \beta > 60°$. Z kombinácie uhlov pri bodoch Q, T priamky BB_1 vidíme, že na vyšetrovaný súčet uhlov STS_0 a SQA_1 ostáva len $2 \cdot 180° - 3\beta < 180°$. Tým je požadovaná vlastnosť dokázaná.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Dokážte, že v každom trojuholníku delí os uhla protiľahlú stranu v pomere strán priľahlých. [Ak D je priesečník strany CA a osi uhla CBA, tak pomer q obsahov trojuholníkov BCD a BAD možno vyjadriť dvoma spôsobmi: $q = |BC| : |BA|$ (lebo výšky spustené z D majú rovnakú veľkosť) a zároveň $q = |CD| : |AD|$.]

N2. V rovnoramennom trojuholníku so základňou dĺžky a a ramenami dĺžky b vyjadrite veľkosť polomeru vpísanej kružnice. [$\varrho = \frac{1}{2}a\sqrt{4b^2 - a^2}/(a + 2b)$]

N3. Dokážte platnosť súčtového vzorca $\operatorname{tg}(x + y) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)/(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)$.

D1. Na odvesnách dĺžok a, b pravouhlého trojuholníka ležia postupne stredy dvoch kružníc k_a, k_b. Obe kružnice sa dotýkajú prepony a prechádzajú vrcholom oproti prepone. Polomery uvedených kružníc označme ϱ_a, ϱ_b. Určte najväčšie kladné reálne číslo p také, že nerovnosť

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} \geqq p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

platí pre všetky pravouhlé trojuholníky. [58–A–II–2]

---

4. *Nech p, q sú dve rôzne prvočísla, m, n prirodzené čísla a súčet*

$$\frac{mp - 1}{q} + \frac{nq - 1}{p}$$

je celé číslo. Dokážte, že platí nerovnosť

$$\frac{m}{q} + \frac{n}{p} > 1.$$

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Aby sa dala jednoduchšie využiť podmienka celočíselnosti, súčet z prvej vety zadania prepíšeme na jeden zlomok do tvaru

$$\frac{mp - 1}{q} + \frac{nq - 1}{p} = \frac{p(mp - 1) + q(nq - 1)}{pq}.$$

Čitateľ posledného zlomku je násobkom jeho menovateľa, takže je deliteľný ako prvočíslom p, tak aj prvočíslom q. Keďže prvý sčítanec čitateľa je násobkom p, musí ním byť aj druhý sčítanec, teda $p \mid q(nq - 1)$. Z nesúdeliteľnosti prvočísel p, q odtiaľ dostávame $p \mid nq - 1$. Podobne máme $q \mid p(mp - 1)$, čiže $q \mid mp - 1$.

Prirodzené číslo $mp + (nq - 1)$ (ktoré možno zapísať aj v tvare $(mp - 1) + nq$) je preto deliteľné ako číslom p, tak aj číslom q, a teda aj (vďaka nesúdeliteľnosti p, q) súčinom pq. Pre jeho veľkosť potom platí odhad

$$mp + nq - 1 \geqq pq, \quad \text{odkiaľ} \quad mp + nq > pq.$$

Po vydelení oboch strán číslom pq dostaneme nerovnosť, ktorú sme mali dokázať.

Poznámka. Kľúčové tvrdenie $pq \mid mp + nq - 1$ možno dokázať aj inak. Keďže $p \mid nq - 1$ a $q \mid mp - 1$, nutne $pq \mid (nq - 1)(mp - 1) = mnpq + 1 - mp - nq$. Odtiaľ $pq \mid 1 - mp - nq$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite niekoľko štvoríc m, n, p, q vyhovujúcich predpokladom zadania. [Vyhovuje ľubovoľná štvorica, pre ktorú sú oba zlomky $(mp - 1)/q$, $(nq - 1)/p$ celé čísla.]

N2. Nech a, b, c sú prirodzené čísla. Dokážte, že ak sú a, b nesúdeliteľné a $a \mid bc$, tak $a \mid c$. [Keďže $(a, b) = 1$, existujú celé čísla x, y také, že $ax + by = 1$. Keďže $a \mid bc$, existuje k také, že $ak = bc$. Odtiaľ $aky = bcy = c(1 - ax)$, čiže $c = a(ky + cx)$, teda $a \mid c$.]

N3. Pre celé čísla a, b, c, d platí $b \mid a + c$, $a \mid b + d$. Dokážte, že $ab \mid ad + bc + cd$. [$ab \mid (a + c)(b + d) = ab + (ad + bc + cd)$]

D1. Určte všetky celé kladné čísla m, n také, že n delí $2m - 1$ a m delí $2n - 1$. [59–A–II–3]

D2. Určte všetky dvojice (m, n) kladných celých čísel, pre ktoré je číslo $4(mn + 1)$ deliteľné číslom $(m + n)^2$. [60–A–II–3]

D3. Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prvočísel p, q, r spĺňajúce nasledujúce podmienky:

$$p \mid q + r,$$
$$q \mid r + 2p,$$
$$r \mid p + 3q.$$

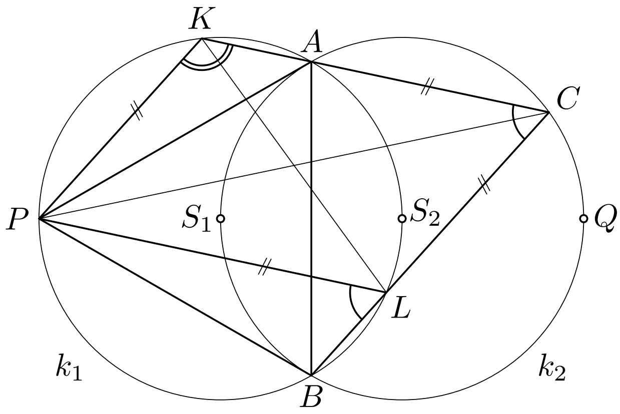
[55–A–III–5]

---

5. *Dané sú dve zhodné kružnice k_1, k_2 s polomerom rovným vzdialenosti ich stredov. Ich priesečníky označme A a B. Na kružnici k_2 zvoľme bod C tak, že úsečka BC pretne kružnicu k_1 v bode rôznom od B, ktorý označíme L. Priamka AC pretne kružnicu k_1 v bode rôznom od A, ktorý označíme K. Dokážte, že priamka, na ktorej leží ťažnica z vrcholu C trojuholníka KLC, prechádza pevným bodom nezávislým od polohy bodu C.*
(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Označme S_1, S_2 stredy kružníc k_1, k_2. Nech P je taký bod kružnice k_1, že PS_2 je jej priemerom. Ukážeme, že hľadaným pevným bodom je P, t. j. dokážeme, že stred úsečky KL leží s bodmi P, C na jednej priamke.

Aby úsečka BC preťala kružnicu k_1, musí bod C ležať vnútri kratšieho oblúka AQ kružnice k_2, pričom S_1Q je priemerom k_2. Bod L je potom vnútorným bodom kratšieho oblúka AB a bod K vnútorným bodom kratšieho oblúka PA kružnice k_1 (obr. 11).



Obr. 11

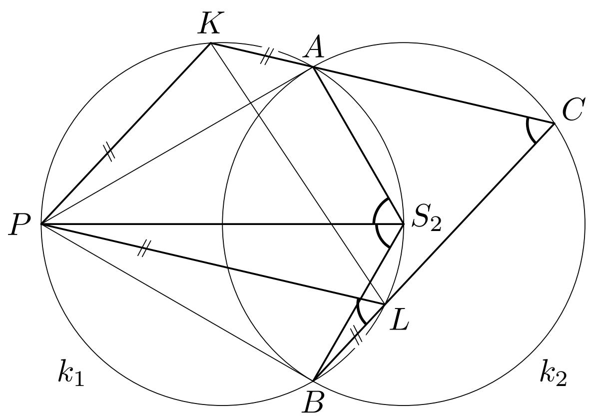
Keďže kružnice majú rovnaké polomery, sú trojuholníky S_1S_2A, S_1S_2B rovnostranné a veľkosť stredového uhla BS_1A je 120°. Príslušný obvodový uhol BPA má preto veľkosť 60°. Navyše body A, B sú súmerne združené podľa priamky PS_2, takže $|PA| = |PB|$ a trojuholník ABP je rovnostranný[4]. Všetky obvodové uhly nad zhodnými tetivami PA, PB, AB majú teda veľkosť 60° (ak vrchol leží na dlhšom oblúku), resp. 120° (ak vrchol leží na kratšom oblúku). Pri tetive AB to platí aj pre obvodové uhly na kružnici k_2, keďže obe kružnice sú zhodné.

Z uvedeného dostávame

$$|\measuredangle ACB| = 60^\circ, \qquad |\measuredangle PLB| = 60^\circ, \qquad |\measuredangle PKA| = 120^\circ.$$

Z rovnosti prvých dvoch uhlov vyplýva rovnobežnosť priamok PL a KC a z toho, že súčet prvého a tretieho uhla je 180°, vyplýva rovnobežnosť priamok PK a LC. Štvoruholník $PLCK$ je teda rovnobežník, z čoho už priamo vyplýva dokazované tvrdenie (uhlopriečky rovnobežníka sa rozpoľujú, takže priamka PC prechádza stredom úsečky KL).

Iné riešenie. Označme body rovnako ako v prvom riešení. Odlišným spôsobom dokážeme, že $PLCK$ je rovnobežník.



Obr. 12

[4] To ihneď vyplýva aj z toho, že P, B, S_2, A sú štyri zo šiestich vrcholov pravidelného šesťuholníka vpísaného do k_1.

Body A, B sú súmerne združené podľa priamky PS_2, preto s využitím vlastností obvodových a stredových uhlov dostávame

$$|\measuredangle PLB| = |\measuredangle PS_2B| = \frac{1}{2}|\measuredangle AS_2B| = |\measuredangle ACB|,$$

odkiaľ vyplýva $PL \parallel KC$. Štvoruholník $PLAK$ je teda lichobežník, a keďže je tetivový (má opísanú kružnicu k_1), musí byť rovnoramenný. Jeho uhlopriečky KL, PA sú teda zhodné, a keďže z vyššie spomenutej súmernosti máme $|PA| = |PB|$, platí tiež $|KL| = |PB|$. Štvoruholník $KPBL$ je tetivový a jeho protiľahlé strany KL, PB sú zhodné, takže to tiež musí byť rovnoramenný lichobežník[5] (obr. 12). Z toho už dostávame $PK \parallel LC$.

Poznámka. Zadané tvrdenie platí, aj keď pripustíme, že kružnice k_1, k_2 majú rôzne polomery, pričom S_2 leží na k_1; v druhom uvedenom riešení sme nikde nevyužili zhodnosť kružníc. V takom prípade však bod K môže ležať aj mimo kratšieho oblúka PA, takže treba osobitne rozlíšiť dva prípady.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že každý tetivový lichobežník je rovnoramenný. [Ak $PQRS$ je tetivový lichobežník so základňou PQ, tak zo striedavých uhlov máme $|\measuredangle QPR| = |\measuredangle SRP|$. Teda obvodové uhly nad tetivami QR, PS majú rovnakú veľkosť a tetivy QR, PS musia byť zhodné. Iný spôsob: Os každej tetivy prechádza stredom kružnice, preto os strany PQ je totožná s osou strany RS (sú rovnobežné a prechádzajú spoločným bodom) a podľa tejto osi sú úsečky PS, QR súmerne združené, čiže zhodné.]

N2. Dokážte, že v štvoruholníku sa obe uhlopriečky rozpoľujú práve vtedy, keď je to rovnobežník. [Ak sa v štvoruholníku $ABCD$ uhlopriečky rozpoľujú v bode S, tak trojuholníky ABS, CDS sú zhodné a zo striedavých uhlov $AB \parallel CD$, analogicky $BC \parallel AD$. Ak $ABCD$ je rovnobežník s priesečníkom uhlopriečok S, tak zo striedavých uhlov vyplýva zhodnosť trojuholníkov ABS, CDS, t. j. zhodnosť úsečiek BS, SD, resp. AS, SC.]

D1. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Dokážte, že spojnica priesečníkov výšok trojuholníka ABC s priesečníkom výšok trojuholníka ABD je rovnobežná s priamkou CD. [58–A–I–2]

D2. Je daná kružnica k s tetivou AC, ktorá nie je priemerom. Na jej dotyčnici vedenej bodom A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D priesečník kružnice k s vnútrom úsečky XC (ak existuje). Trojuholník ACD doplníme na lichobežník $ABCD$ vpísaný do kružnice k. Určte množinu priesečníkov priamok BC a AD prislúchajúcich všetkým takým lichobežníkom. [59–A–III–4]

---

6. *Nájdite najväčšie reálne číslo k také, že nerovnosť*

$$\frac{2(a^2 + kab + b^2)}{(k+2)(a+b)} \geqq \sqrt{ab}$$

platí pre všetky dvojice kladných reálnych čísel a, b. (Ján Mazák)

Riešenie. Pre $k = 2$ sa dá nerovnosť po vykrátení upraviť na tvar $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab}$, čo je známa nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platná pre ľubovoľné kladné a, b. Hľadané najväčšie k je teda určite aspoň 2. Skúmajme ďalej danú nerovnosť len za predpokladu $k \geqq 2$.

[5] Vyplýva to napríklad z rovnosti obvodových uhlov PLB, KPL nad zhodnými tetivami PB, KL, alebo jednoducho zo súmernosti podľa osi úsečky BL.

Ekvivalentnou úpravou (keďže $k+2>0$) dostaneme

$$2(a^2+kab+b^2) \geqq (k+2)(a+b)\sqrt{ab}$$

a po vydelení oboch strán členom b^2 máme

$$2\left(\frac{a^2}{b^2}+k\frac{a}{b}+1\right) \geqq (k+2)\left(\frac{a}{b}+1\right)\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Označme $\sqrt{a/b}=x$. Zrejme x môže nadobudnúť ľubovoľnú kladnú hodnotu. Ďalej sa preto stačí zaoberať nerovnosťou

$$2(x^4+kx^2+1) \geqq (k+2)(x^2+1)x$$

a hľadať najväčšie k také, že je splnená pre každé kladné x. Po jednoduchých úpravách smerujúcich k osamostatneniu k dostávame

$$\begin{aligned} k\big((x^2+1)x-2x^2\big) &\leqq 2\big(x^4+1-(x^2+1)x\big),\\ k(x^3-2x^2+x) &\leqq 2(x^4-x^3-x+1),\\ kx(x^2-2x+1) &\leqq 2\big(x^3(x-1)-(x-1)\big),\\ kx(x-1)^2 &\leqq 2(x-1)^2(x^2+x+1). \end{aligned}$$

pre $x=1$ je posledná nerovnosť splnená vždy. Pre $x\neq 1$ nerovnosť vydelíme kladným výrazom $x(x-1)^2$ a získame priamo ohraničenie pre k:

$$k \leqq \frac{2(x^2+x+1)}{x} = 2+2\left(x+\frac{1}{x}\right). \tag{1}$$

Pre kladné x je $x+1/x \geqq 2$, pričom rovnosť platí jedine pre $x=1$. Pre $x\neq 1$ výraz $x+1/x$ nadobúda všetky hodnoty z intervalu $(2,\infty)$. Teda pravá strana v (1) nadobúda všetky hodnoty z intervalu $(6,\infty)$. Z toho je jasné, že najväčšie k také, že (1) platí pre všetky kladné $x\neq 1$, je $k=6$.

Iné riešenie. Zadanú nerovnosť ekvivalentne upravíme:

$$\frac{2}{k+2}\cdot\frac{(a+b)^2+(k-2)ab}{a+b} \geqq \sqrt{ab},$$

$$\frac{2}{k+2}\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+(k-2)\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right) \geqq 1. \tag{2}$$

Označme $x=(a+b)/\sqrt{ab}$. Potom $x\geqq 2$, pretože $\frac{1}{2}(a+b)\geqq\sqrt{ab}$. Úpravou (2) za podmienky $k+2>0$ získame

$$\frac{2}{k+2}\left(x+(k-2)\frac{1}{x}\right) \geqq 1,$$

$$x^2-\frac{k+2}{2}x+(k-2) \geqq 0. \tag{3}$$

Kvadratická funkcia na ľavej strane poslednej nerovnosti má pre každé k koreň $x=2$ a jej koeficient pri kvadratickom člene je kladný. Takže (3) platí pre každé $x\geqq 2$ práve vtedy, keď je vrchol paraboly tejto funkcie na číselnej osi naľavo od bodu 2, teda práve vtedy, keď

$$\frac{k+2}{4}\leqq 2, \qquad \text{čiže} \quad k\leqq 6.$$

Záver. Hľadaná najväčšia hodnota je $k=6$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte, aké hodnoty nadobúda výraz $x + 1/x$ pre $x > 0$. [Keďže $(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})^2 \geqq 0$, máme $x + 1/x \geqq 2$. Rovnosť nastáva pre $x = 1$. Výraz nadobudne aj všetky hodnoty väčšie ako 2, pretože rovnica $x + 1/x = p$ má pre $p > 2$ dva kladné korene $\frac{1}{2}p \pm \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4}$.]

N2. Určte všetky hodnoty parametra p, pre ktoré nadobúda kvadratická funkcia $f(x) = = x^2 + px + p - 1$ na obore kladných čísel len kladné hodnoty. [Keďže $f(x) = (x + + 1)(x + p - 1)$, koreňmi funkcie sú -1 a $1 - p$. Zadaná podmienka je splnená práve vtedy, keď ani jeden z koreňov nie je kladný, teda keď $p \geqq 1$.]

D1. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} \leqq \frac{a + b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť. [59–C–I–5]

D2. Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a + b}{2} < \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

[58–C–I–6]

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: 1. Pavel Novotný, 2. Vojtech Bálint, 3. Jaromír Šimša, 4. Jaromír Šimša, 5. Tomáš Jurík, 6. Ján Mazák

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Karel Horák

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011