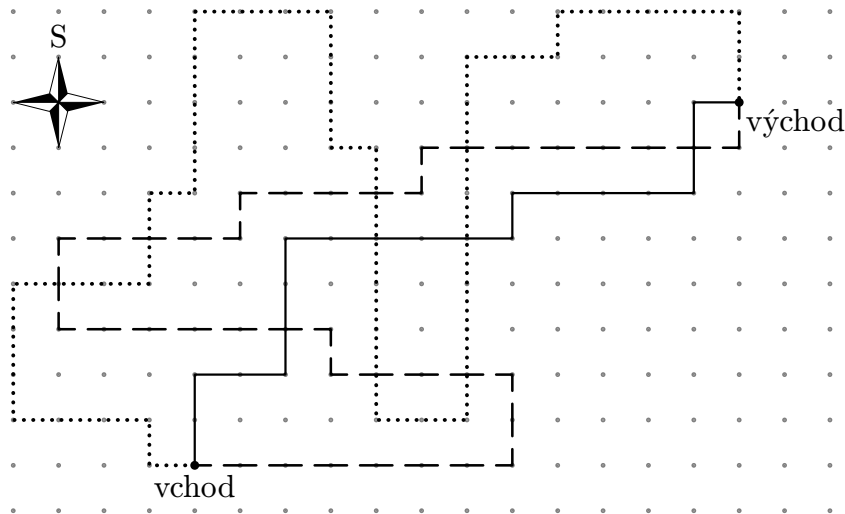


61. ročník Matematickej olympiády  
2011/2012

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5

1. Traja kamaráti Pankrác, Servác a Bonifác išli cez prázdniny na nočnú prechádzku prírodným labyrintom. Pri vstupe dostal každý sviečku a vydal sa iným smerom ako zvyšní dvaja. Všetci traja labyrintom úspešne prešli, ale každý išiel inou cestou. V štvorcovej sieti na obr. 1 sú vyznačené ich cesty. Vieme, že Pankrác nikdy nešiel na juh a že Servác nikdy nešiel na západ. Koľko metrov prešiel v labyrinte Bonifác, keď vieme, že Pankrác prešiel presne 500 m? (M. Petrová)



Obr. 1

**Nápad.** Ktorou cestou Bonifác určite nešiel?

**Riešenie.** Najskôr určíme, ktorými cestami išli jednotliví kamaráti. Na to potrebujeme vedieť, na ktoré svetové strany vedú jednotlivé cesty. Cesta pozdĺž plnej čiary vedie iba na sever a východ. Čiarkovaná cesta vedie na sever, východ a západ. Bodkovaná cesta mieri postupne na všetky svetové strany. Jediná cesta, ktorá nevedie nikdy západným smerom, je tá vyznačená plnou čiarou – patrí teda Servácovi. Tadiaľ Bonifác určite nešiel. Zo zvyšných dvoch ciest na juh nemieri tá čiarkovaná – po nej teda šiel Pankrác. Potom Bonifác musel ísť po bodkovanej čiare.

Vieme, že Pankrác prešiel 500 m. Teraz spočítajme, po koľkých úsečkách (t. j. stranách štvorcovka štvorcovej siete) šiel:

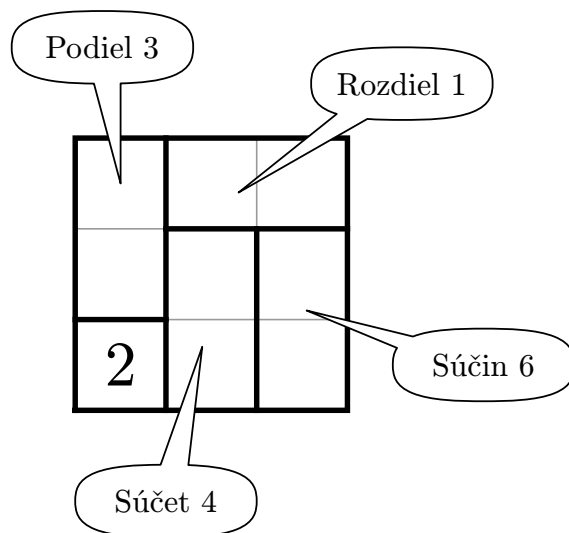
$$7(\text{východ}) + 2(\text{sever}) + 4(\text{západ}) + 1(\text{sever}) + 6(\text{západ}) + 2(\text{sever}) + 4(\text{východ}) + 1(\text{sever}) + 4(\text{východ}) + 1(\text{sever}) + 7(\text{východ}) + 1(\text{sever}) = 40.$$

Takisto zistíme, po koľkých úsečkách išiel Bonifác:

$$1(\text{západ}) + 1(\text{sever}) + 3(\text{západ}) + 3(\text{sever}) + 3(\text{východ}) + 2(\text{sever}) + 1(\text{východ}) + 4(\text{sever}) + 3(\text{východ}) + 3(\text{juh}) + 1(\text{východ}) + 6(\text{juh}) + 2(\text{východ}) + 8(\text{sever}) + 2(\text{východ}) + 1(\text{sever}) + 4(\text{východ}) + 2(\text{juh}) = 50.$$

Ak 40 úsečiek meria 500 m, tak 10 úsečiek meria  $500 : 4 = 125$  (m). Takže 50 úsečiek meria  $500 + 125 = 625$  (m). Bonifác prešiel v labyrinte 625 metrov.

2. Do každého nevyplneného štvorčeka na obr. 2 doplňte číslo 1, 2 alebo 3 tak, aby v každom stĺpci a riadku bolo každé z týchto čísel práve raz a aby boli splnené dodatočné požiadavky v každej vyznačenej oblasti.



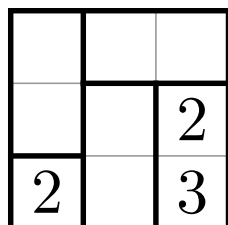
Obr. 2

(Ak vo vyznačenej oblasti požadujeme určitý podiel, máme na mysli podiel, ktorý získame vydelením väčšieho čísla menším. Podobne pracujeme aj s rozdielom.)

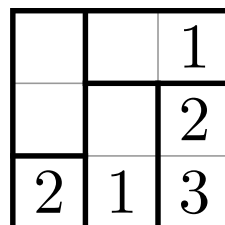
(S. Bednářová)

**Nápad.** Začnite súčinom.

**Riešenie.** Začneme súčinom: Z čísel 1, 2 a 3 potrebujeme vybrať dve také, aby ich súčin bol 6. Do úvahy prichádza jediná možnosť – 2 a 3. Keďže v treťom riadku už dvojka je, môžeme do príslušného políčka tohto riadku dopísať jedine trojku (obr. 3). Je zrejmé, že v prvom políčku tretieho stĺpca a v druhom políčku tretieho riadku môžu byť jedine jednotky (obr. 4).



Obr. 3



Obr. 4

Teraz napr. súčet: Súčet dvoch čísel má byť 4 a jeden zo sčítancov je 1, takže druhý musí byť 3 (obr. 5). Všimnime si teraz rozdiel: Rozdiel dvoch čísel má byť 1, jedným z týchto čísel je 1, takže druhé musí byť 2 (obr. 6).

		1
	3	2
2	1	3

Obr. 5

	2	1
	3	2
2	1	3

Obr. 6

Zostáva doplniť posledné čísla: V prvom riadku chýba číslo 3, v druhom riadku chýba číslo 1 (obr. 7). Ešte overíme, že podiel práve doplnených čísel je naozaj 3 a že v každom stĺpci a riadku je každé z čísel 1, 2 a 3 práve raz.

3	2	1
1	3	2
2	1	3

Obr. 7

*Poznámka.* Samozrejme sa dá postupovať rôznymi spôsobmi, v každom prípade si však rýchlo všimneme, že v zadaní je podstatne viac informácií, ako je potrebné na jednoznačné vyriešenie úlohy. Pokiaľ sa napr. prednostne sústredíme na požiadavku, aby v každom stĺpci a riadku bolo každé z čísel 1, 2, 3 práve raz, tak stačí už len jedna zo štyroch zmienených informácií – viete zistiť ktorá? Súčasne niektoré zmienené informácie sú splnené vždy – viete zistiť ktoré?

---

**3.** *Julka pripravuje pre svoje kamarátky občerstvenie – chlebíčky. Natrie ich zemiakovým šalátom a navrch chce dať ešte prísady: šunku, tvrdý syr, plátok vajíčka a prúžok nakladanej papriky. Nechce však, aby niektoré dva chlebíčky obsahovali úplne rovnakú kombináciu prísad. Aký najväčší počet navzájom rôznych chlebíčkov môže nachystať, ak žiadny z nich nemá mať všetky štyri prísady a žiadny z nich nie je iba so šalátom (t. j. bez ďalších prísad)?* (M. Petrová)

**Nápad.** Vymyslíte vhodný systém, podľa ktorého budete jednotlivé možnosti vypisovať.

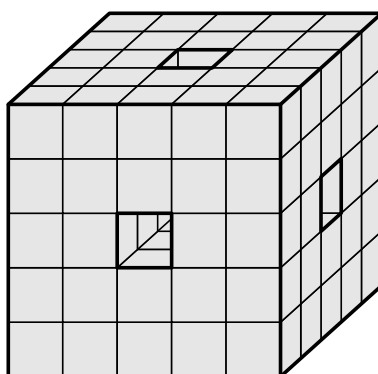
**Riešenie.** Pre prehľadnosť zostavíme tabuľku. Hviezdička znamená, že daný chlebíček obsahuje príslušnú prísadu, prázdne políčko znamená, že chlebíček túto prísadu neob-

sahuje.

	šunka	syr	vajíčko	paprika	
1 prísada	*				1
		*			2
			*		3
				*	4
2 prísady	*	*			5
	*		*		6
	*			*	7
		*	*		8
		*		*	9
			*	*	10
3 prísady	*	*	*		11
	*	*		*	12
	*		*	*	13
		*	*	*	14

Pretože sme tabuľku tvorili systematicky a vyčerpali sme všetky možnosti, vidíme, že Julka môže pripraviť až 14 chlebičkov tak, aby boli splnené jej požiadavky.

4. Na obr. 8 je nakreslená stavba zlepená z rovnako veľkých kociek. Stavba je vlastne veľká kocka s tromi rovnými tunelmi, ktorými sa dá pozeráť skrz a ktoré majú všade rovnaký prierez. Z koľkých kociek je stavba zlepená? (M. Krejčová)

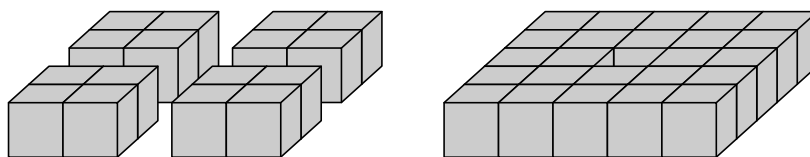


Obr. 8

**Nápad.** Skúste počítať po vrstvách.

**Riešenie.** Stavbu rozdelíme štyrmi vodorovnými rezmi na päť vrstiev. Prostredná vrstva je na obr. 9 vľavo, skladá sa zo 16 kociek. Ostatné štyri vrstvy vyzerajú všetky

tak, ako vidno na obr. 9 vpravo, a každá z nich sa skladá z 24 kociek. Na celú stavbu bolo teda použitých  $16 + 4 \cdot 24 = 112$  kociek.



Obr. 9

**Iný nápad.** Koľko kociek chýba v tuneloch?

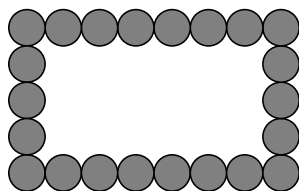
**Iné riešenie.** Predstavme si, že by stavba bola vyhotovená bez „tunelov“ a tie by boli prerazené až dodatočne. Pôvodne sa teda skladala z  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$  kociek. Prerazením prvého tunela stavba stratila 5 kociek, prerazením ďalších dvoch tunelov stratila po 4 kockách. Konečný počet kociek je teda  $125 - 5 - 4 - 4 = 112$ .

**5.** V rozprávke o siedmich zhavranených bratoch bolo sedem bratov, z ktorých každý sa narodil presne rok a pol po predchádzajúcom bratovi. Keď bol najstarší z bratov práve štyrikrát starší ako najmladší, matka všetkých bratov zakliala. Koľko rokov mali jednotliví bratia, keď ich matka zakliala? (M. Volfová)

**Nápad.** Aký bol vekový rozdiel najmladšieho a najstaršieho brata?

**Riešenie.** Najstarší brat bol od najmladšieho starší o 9 rokov ( $6 \cdot 1,5 = 9$ ). Najstarší brat bol štyrikrát starší ako najmladší, takže rozdiel 9 rokov musí zodpovedať trojnásobku veku najmladšieho brata. V čase zakliatia mal teda najmladší 3 roky ( $9 : 3 = 3$ ). Ďalší bratia mali postupne 4 a pol, 6, 7 a pol, 9, 10 a pol, 12 rokov.

**6.** Janka a Hanka sa rady hrajú s modelmi zvieratiek. Hanka pre svoje kravičky postavila z uzáverov z PET fľaš obdĺžnikovú ohradu ako na obr. 10. Janka zo všetkých svojich uzáverov zložila pre ovečky ohradu tvaru rovnostranného trojuholníka. Potom ju rozobrala a postavila pre ne štvorcovú ohradu, takisto zo všetkých svojich uzáverov. Koľko mohla mať Janka uzáverov? Nájdite aspoň dve riešenia. (M. Volfová)



Obr. 10

**Nápad.** Mohla by Janka mať napr. 6 alebo 8 uzáverov?

**Riešenie.** To, že Janka zložila ohradu tvaru rovnostranného trojuholníka, znamená, že počet jej uzáverov musel byť násobkom čísla 3. Podobne, štvorcovú ohradu mohla

postaviť len vtedy, keď počet uzáverov bol násobkom čísla 4. Počet uzáverov teda musel byť súčasne násobkom čísla 3 i 4, t. j. napr. 12, 24, 36, ... (ľubovoľný násobok čísla 12).

---

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: 1. M. Petrová, 2. S. Bednářová, 3. M. Petrová, 4. M. Krejčová, 5. M. Volfová,  
6. M. Volfová

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smit-  
ková, Erika Trojáková

Redakčná úprava: Erika Trojáková, Vojtěch Žádník

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011