61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9

---

1. *Pokladníčka v galérii predáva návštevníkom vstupenky s číslom podľa toho, koľkí v poradí v ten deň prišli. Prvý návštevník dostane vstupenku s číslom* 1*, druhý s číslom* 2*, atď. Počas dňa sa však minul žltý papier, na ktorý sa vstupenky tlačili, preto musela pokladníčka pokračovať tlačením na červený papier. Za celý deň predala rovnako veľa žltých vstupeniek ako červených. Večer zistila, že súčet čísel na žltých vstupenkách bol o* 1 681 *menší ako súčet čísel na červených vstupenkách. Koľko vstupeniek v ten deň predala?* (*M. Mach*)

Nápad. Všimnite si, o koľko sa líšia čísla na predaných žltých a červených vstupenkách.

Riešenie. Označme počet žltých vstupeniek n. Na prvej žltej vstupenke bolo číslo 1, na druhej 2, atď., na poslednej žltej vstupenke bolo číslo n. Na prvej červenej vstupenke bolo číslo $n+1$, na druhej červenej $n+2$, atď., na poslednej červenej bolo číslo $2n$.

Všimnime si, že prvá červená vstupenka má číslo o n väčšie ako prvá žltá. Rovnako druhá červená vstupenka má číslo o n väčšie ako druhá žltá; to isté platí pre všetky takéto dvojice vstupeniek, ktorých je celkom n. Súčet čísel na červených vstupenkách je preto o n^2 väčší ako súčet čísel na žltých vstupenkách. Zo zadania vieme, že $n^2 = 1\,681$, teda $n = 41$.

Pokladníčka v ten deň predala 41 žltých a 41 červených vstupeniek, celkom teda 82 vstupeniek.

---

2. *Filoména má mobil s rozmiestnením tlačidiel ako na obr. 1.*

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Obr. 1

Deväťciferné telefónne číslo jej najlepšej kamarátky Kláry má tieto vlastnosti:

- *všetky cifry Klárinho telefónneho čísla sú rôzne,*
- *prvé štyri cifry sú zoradené podľa veľkosti od najmenšej po najväčšiu a stredy ich tlačidiel tvoria štvorec,*
- *stredy tlačidiel posledných štyroch cifier takisto tvoria štvorec,*
- *telefónne číslo je deliteľné tromi aj piatimi.*

Koľko rôznych deväťciferných čísel by mohlo byť Kláriným telefónnym číslom? (*K. Pazourek*)

Nápad. Ktoré cifry môžu tvoriť poslednú a ktoré prvú štvoricu?

Riešenie. Najskôr nájdime všetky štvorice tlačidiel, ktorých stredy tvoria štvorec – sú to tlačidlá s nasledujúcimi ciframi:

1, 2, 4, 5	1, 3, 7, 9
2, 3, 5, 6	2, 4, 6, 8
4, 5, 7, 8	5, 7, 9, 0
5, 6, 8, 9	

Štvorice v ľavom stĺpci však využiť nemôžeme, lebo vedľa štvorca, ktorý príslušné tlačidlá tvoria, by sme žiadny ďalší štvorec zo zvyšných tlačidiel nezostavili. Keďže telefónne číslo je deliteľné piatimi, musí končiť 5 alebo 0; preto posledné štyri cifry telefónneho čísla sú 5, 7, 9, 0 (ich poradie diskutujeme neskôr). Keďže sme už použili cifry 7 a 9, prvé štyri cifry telefónneho čísla musia byť 2, 4, 6, 8 (v tomto poradí, sú zoradené podľa veľkosti).

Doteraz nepoužité cifry, ktoré môžu byť uprostred telefónneho čísla, sú 1 a 3. Telefónne číslo má byť deliteľné tromi, určme teda možné ciferné súčty. Súčet všetkých cifier na klávesnici je 45. Ak by v telefónnom čísle bola 1, t. j. telefónne číslo by obsahovalo všetky cifry okrem 3, bol by ciferný súčet $45 - 3 = 42$. Ak by v telefónnom čísle bola 3, bol by ciferný súčet $45 - 1 = 44$. Číslo 42 je deliteľné 3, číslo 44 nie je, prostredná cifra je teda 1.

Keďže sme nevynechali žiadnu z požiadaviek v zadaní, hľadané telefónne číslo je

$$246\,81{*}\,{*}{*}{*},$$

pričom posledné štyri cifry sú 5, 7, 9, 0 v neznámom poradí, vieme len, že na poslednom mieste musí byť 5 alebo 0. Aby sme zistili počet všetkých možných Klárinych telefónnych čísel, nebudeme ich všetky vypisovať, len si touto predstavou pomôžeme: Poslednú cifru možno zvoliť dvoma spôsobmi, predposlednú cifru potom vyberáme spomedzi troch zvyšných cifier, cifru pred ňou už len spomedzi dvoch zvyšných a na posledné nevyplnené miesto nám vždy zvýši jediná cifra. Dostávame dokopy

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

možných poradí na posledných štyroch miestach, a teda aj 12 možných Klárinych telefónnych čísel.

---

3. *Alenka pozorovala veveričky na záhradke, kde rástli tieto tri stromy: smrek, buk a jedľa. Veveričky sedeli pokojne na stromoch, takže ich mohla spočítať – bolo ich 34. Keď preskákalo 7 veveričiek zo smreka na buk, bolo ich na buku rovnako veľa ako na oboch ihličnanoch dokopy. Potom ešte preskákalo 5 veveričiek z jedle na buk, a vtedy bolo na jedli rovnako veľa veveričiek ako na smreku. Na buku ich bolo vtedy dvakrát viac, ako na jedli na úplnom začiatku. Koľko veveričiek pôvodne sedelo na každom strome?* (*M. Mach*)

Nápad. Zostavte sústavu rovníc. Pred samotným riešením sústavy si všimnite, že niektoré rovnice sú prebytočné, t. j. dajú je odvodiť z ostatných.

Riešenie. Pôvodný počet veveričiek na smreku označíme s, na buku b a na jedli j. Zo zadania môžeme zostaviť sústavu štyroch rovníc o týchto troch neznámych:

$$\begin{aligned} s+b+j &= 34, \\ b+7 &= j+s-7, \\ j-5 &= s-7, \\ b+7+5 &= 2j. \end{aligned}$$

Všimnime si, že sčítaním tretej a štvrtej rovnice dostaneme rovnicu druhú. Pre vyriešenie sústavy rovníc preto stačí vybrať ľubovoľné dve z týchto troch rovníc a doplniť ich prvou rovnicou. Takto dostaneme sústavu troch rovníc o troch neznámych. Ukážeme si riešenie s prvou, druhou a štvrtou rovnicou:

$$\begin{aligned} s+b+j &= 34, \\ b+7 &= j+s-7, \\ b+7+5 &= 2j. \end{aligned}$$

Sčítame prvé dve rovnice a upravíme:

$$\begin{aligned} s+2b+j+7 &= 27+j+s, \\ 2b &= 20, \\ b &= 10. \end{aligned}$$

Dosadíme tento výsledok do poslednej rovnice a vyjadríme j:

$$\begin{aligned} 10+7+5 &= 2j, \\ 22 &= 2j, \\ j &= 11. \end{aligned}$$

Všetko dosadíme do prvej rovnice a vyjadríme s:

$$\begin{aligned} s+10+11 &= 34, \\ s &= 13. \end{aligned}$$

Na smreku pôvodne sedelo 13, na buku 10 a na jedli 11 veveričiek.

Iný nápad. Určte, koľko veveričiek sedelo na buku vo chvíli, keď ich tam bolo rovnako veľa ako na oboch ihličnatých stromoch.

Iné riešenie. Po prvom preskákaní bola na buku presne polovica veveričiek, čiže 17. Keďže ich na buk 7 priskočilo, sedelo pôvodne na buku $17 - 7 = 10$ veveričiek.

Po druhom preskákaní bolo na buku $17 + 5 = 22$ veveričiek. Vieme, že na konci bolo na buku dvakrát viac veveričiek ako na jedli na začiatku, teda na začiatku sedelo na jedli $22 : 2 = 11$ veveričiek.

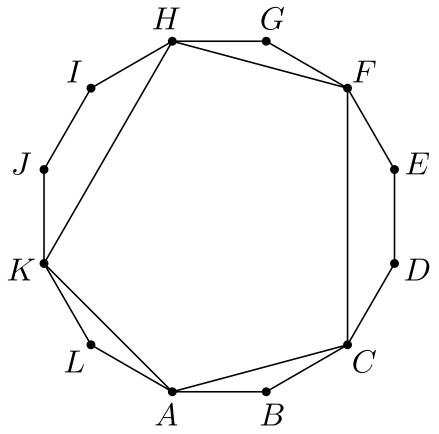
Celkom bolo veveričiek 34, preto bolo pôvodne na smreku $34 - 10 - 11 = 13$ veveričiek. Práve sme došli k pôvodným počtom veveričiek na všetkých stromoch, ale vôbec sme nepracovali so zadanou informáciou, že po všetkých preskokoch bolo na jedli rovnako veľa veveričiek ako na smreku. Musíme overiť, či táto informácia nie je v rozpore s predchádzajúcimi výpočtami (v opačnom prípade by úloha nemala žiadne riešenie): $11 - 5 = 13 - 7$, teda naše výsledky zodpovedajú celému zadaniu.

Na smreku pôvodne sedelo 13, na buku 10 a na jedli 11 veveričiek.

Poznámka. Uvedené riešenia predstavujú rôzne pohľady na ten istý problém. Porovnajte hlavne, ako sme odhalili prebytočnosť jednej zo zadaných informácií v prvom a ako v druhom prípade. Vedeli by ste túto prebytočnosť zistiť aj inak?

---

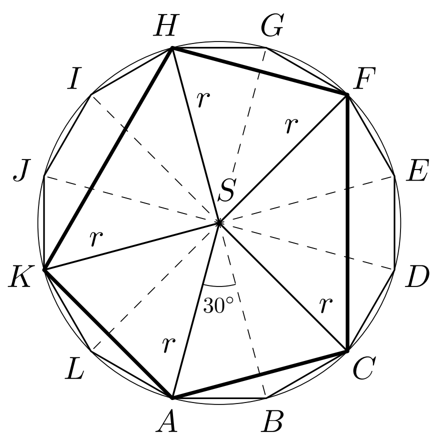
4. *V pravidelnom dvanásťuholníku $ABCDEFGHIJKL$ vpísanom do kružnice s polomerom* 6 cm *určte obvod päťuholníka $ACFHK$ (obr. 2).* (*K. Pazourek*)



Obr. 2

Nápad. Rozdeľte päťuholník na trojuholníky so spoločným vrcholom v strede kružnice opísanej a zistite ich vlastnosti.

Riešenie. Najprv spočítajme veľkosť stredového uhla pravidelného dvanásťuholníka $ABCDEFGHIJKL$, t. j. uhla s vrcholom v strede S opísanej kružnice a ramenami prechádzajúcimi susednými vrcholmi. Súčet všetkých dvanástich stredových uhlov je $360°$, takže veľkosť jedného stredového uhla je $360° : 12 = 30°$.



Obr. 3

Veľkosti stredových uhlov päťuholníka $ACFHK$ sú

$$|\measuredangle ASC| = |\measuredangle FSH| = |\measuredangle KSA| = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ,$$
$$|\measuredangle CSF| = |\measuredangle HSK| = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ.$$

Trojuholníky ASC, FSH, KSA sú teda rovnostranné a trojuholníky CSF a HSK sú rovnoramenné pravouhlé (obr. 3). Preto

$$|AC| = |FH| = |KA| = r = 6\,\mathrm{cm},$$
$$|CF| = |HK| = r\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cm}.$$

Obvod päťuholníka $ACFHK$ je tak rovný $3 \cdot 6 + 2 \cdot 6\sqrt{2} = 18 + 12\sqrt{2} \doteq 34{,}97\,(\mathrm{cm})$.

---

5. *Pred vianočným koncertom ponúkali žiaci na predaj 60 výrobkov z hodín výtvarnej výchovy. Cenu si mohol každý zákazník určiť sám a celý výťažok išiel na dobročinné účely. Na začiatku koncertu žiaci spočítali, koľko centov v priemere utŕžili za jeden predaný výrobok, a vyšlo im celé číslo. Keďže ale nepredali všetkých 60 výrobkov, ponúkali ich aj po koncerte. Po koncerte si ľudia kúpili ešte sedem výrobkov, za ktoré dali dokopy 2 505 centov. Tým sa priemerná tržba za jeden predaný výrobok zvýšila na rovných 130 centov. Koľko výrobkov potom ostalo nepredaných?* (*L. Šimůnek*)

Nápad. Určte vzťah medzi počtom výrobkov predaných pred koncertom a za ne získanou čiastkou. Uvedomte si, že všetky neznáme majú byť celé čísla.

Riešenie. Počet výrobkov, ktoré žiaci predali pred koncertom, označme v a sumu v centoch, ktorú za ne získali, označme k. Podľa zadania je podiel k/v celé číslo a platí

$$\frac{k + 2\,505}{v + 7} = 130.$$

Z tejto rovnice vyjadríme neznámu k pomocou neznámej v:

$$k + 2\,505 = 130v + 130 \cdot 7,$$
$$k = 130v - 1\,595.$$

Získaný výraz dosadíme do zlomku k/v a následne ho čiastočne vydelíme:

$$\frac{130v - 1\,595}{v} = 130 - \frac{1\,595}{v}.$$

Neznáma v je prirodzené číslo, a keďže práve uvedený výraz má byť rovný celému číslu, musí byť v deliteľom čísla 1 595. Pritom číslo $1\,595 = 5 \cdot 11 \cdot 29$ má práve nasledujúce delitele:

$$1,\ 5,\ 11,\ 29,\ 55,\ 145,\ 319,\ 1\,595.$$

Podľa zadania zostalo po predaji v výrobkov z celkových 60 minimálne 7, teda $v \leqq 53$. Keď do rovnice $k = 130v - 1595$ dosadíme za v 1, 5 či 11, dostaneme k záporné, čo odporuje zadaniu. Pre $v = 29$ je tržba k kladná, takže jediná prípustná hodnota pre v je 29. Celkovo sa predalo $29 + 7 = 36$ výrobkov a nepredaných zostalo $60 - 36 = 24$.

Iný nápad. Ak sa hovorí o priemernej cene, skúste si situáciu zjednodušiť predstavou, že všetci zaplatili zhodne práve túto cenu.

Iné riešenie. Pre potreby riešenia môžeme situáciu zjednodušiť a predstaviť si, že každý zákazník nastupujúci pred koncertom zaplatil rovnakú celočíselnú sumu. Tá sa rovnala priemernej cene vypočítanej žiakmi pred koncertom.

Po koncerte prišla sedmica zákazníkov, ktorá za každého skoršieho zákazníka doplatila zaplatenú čiastku do 130 centov a sama za seba zaplatila $7 \cdot 130$ centov. Celkové doplatenie ceny teda zodpovedalo čiastke $2\,505 - 7 \cdot 130 = 1\,595$ (centov).

Túto sumu musíme rozložiť na súčin, pričom jedným činiteľom bude počet zákazníkov pred koncertom a druhým činiteľom počet centov, ktoré za každého takého zákazníka doplatila sedmice neskorších zákazníkov. O prvom činiteli vieme zo zadania, že musí byť menší alebo rovný 53, a o druhom vieme, že musí byť menší ako 130. Číslo $1\,595$ možno rozložiť na súčin dvoch prirodzených čísel práve týmito spôsobmi:

$$1 \cdot 1\,595,\ \ 5 \cdot 319,\ \ 11 \cdot 145,\ \ 29 \cdot 55.$$

Uvedeným podmienkam vyhovuje jedine rozklad $29 \cdot 55$. Celkovo sa teda predalo $29 + 7 = 36$ výrobkov a nepredaných ostalo $60 - 36 = 24$.

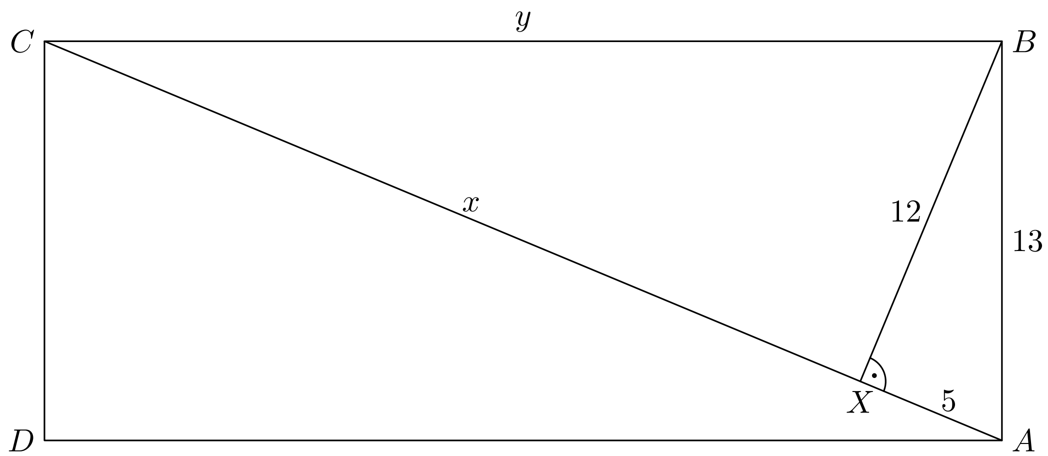
---

6. *V obdĺžnikovej záhrade rastie broskyňa. Tento strom je od dvoch susedných rohov záhrady vzdialený 5 metrov a 12 metrov a vzdialenosť medzi spomínanými dvoma rohmi je 13 metrov. Ďalej vieme, že broskyňa stojí na uhlopriečke záhrady. Aká veľká môže byť plocha záhrady?* (*M. Mach*)

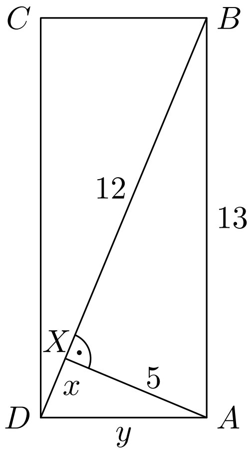
Nápad. Použite vhodne Pytagorovu vetu, príp. opačnú vetu.

Riešenie. Obdĺžnik predstavujúci pôdorys záhrady označíme $ABCD$, broskyňa na jednej z jeho uhlopriečok je zastúpená bodom X. Povedzme, že dva susedné rohy zo zadania sú A, B a platí $|AX| = 5$, $|BX| = 12$, $|AB| = 13$. (Všetky dĺžky sú v metroch a jednotky ďalej nepíšeme.) Tieto čísla tvoria pytagorejskú trojicu, čiže platí $5^2 + 12^2 = 13^2$. Preto je trojuholník AXB pravouhlý s preponou AB, t. j. s pravým uhlom pri vrchole X.

Bod X môže ležať buď na uhlopriečke AC alebo na uhlopriečke BD, budeme diskutovať obe možnosti. V každom prípade vzdialenosť bodu X od druhého vrcholu na uhlopriečke označíme x a neznámu dĺžku strany obdĺžnika označíme y. Zo zadaných informácií určíme y, plocha záhrady (v štvorcových metroch) potom bude rovná $13y$.



Obr. 4



Obr. 5

I. Bod X leží na uhlopriečke AC (obr. 4). Podľa Pytagorovej vety pre pravouhlé trojuholníky ABC a BXC zostavíme sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$\begin{aligned}(5+x)^2 &= 13^2 + y^2,\\ y^2 &= 12^2 + x^2.\end{aligned}$$

Do prvej rovnice dosadíme za y^2 a vypočítame x:

$$\begin{aligned}(5+x)^2 &= 13^2 + 12^2 + x^2,\\ 25 + 10x + x^2 &= 169 + 144 + x^2,\\ 10x &= 288,\\ x &= \frac{144}{5}.\end{aligned}$$

Dosadíme za x do druhej rovnice a výraz upravíme:

$$y^2 = 12^2 + \left(\frac{144}{5}\right)^2 = 144 + \frac{20\,736}{25} = \frac{24\,336}{25}.$$

Odtiaľ vyplýva, že $y = 156/5$ a obsah obdĺžnika $ABCD$, t. j. plocha záhrady (v štvorcových metroch), je v tomto prípade

$$13 \cdot \frac{156}{5} = \frac{2\,028}{5} = 405{,}6.$$

II. Bod X leží na uhlopriečke BD (obr. 5). Podľa Pytagorovej vety pre pravouhlé trojuholníky DAB a DXA zostavíme sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$\begin{aligned}(12+x)^2 &= 13^2 + y^2,\\ y^2 &= 5^2 + x^2.\end{aligned}$$

Do prvej rovnice dosadíme za y^2 a vypočítame x:

$$\begin{aligned}(12+x)^2 &= 13^2 + 5^2 + x^2,\\ 144 + 24x + x^2 &= 169 + 25 + x^2,\\ 24x &= 50,\\ x &= \frac{25}{12}.\end{aligned}$$

Dosadíme za x do druhej rovnice a výraz upravíme:

$$y^2 = 5^2 + \left(\frac{25}{12}\right)^2 = 25 + \frac{625}{144} = \frac{4\,225}{144}.$$

Odtiaľ vyplýva, že $y = 65/12$ a obsah obdĺžnika $ABCD$, t. j. plocha záhrady (v štvorcových metroch), je v tomto prípade

$$13 \cdot \frac{65}{12} = \frac{845}{12} \doteq 70{,}42.$$

Poznámka. Všimnite si výpočet dĺžky x. Dvojitým použitím Pytagorovej vety sme v prvom prípade odvodili, že $5x = 144$, čomu zodpovedá $|AX| \cdot |XC| = |XB|^2$. Uvedený výpočet v podstate dokazuje, že táto rovnosť platí v ľubovoľnom pravouhlom trojuholníku ABC, kde X je päta výšky na preponu AC. Toto tvrdenie je známe ako Euklidova veta o výške.

Iný nápad. Všimnite si podobné trojuholníky.

Iné riešenie. Pri rovnakom označení ako vyššie môžeme jednotlivé možnosti diskutovať nasledovne.

I. Bod X leží na uhlopriečke AC. Trojuholníky ABC a AXB sú oba pravouhlé a majú rovnaký vnútorný uhol pri spoločnom vrchole A. Tieto trojuholníky sú teda podobné, a preto platí

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|XB|}{|AX|}, \qquad \text{čiže} \qquad \frac{y}{13} = \frac{12}{5}.$$

Odtiaľ $y = 156/5$ a záver je rovnaký ako v predošlom riešení.

II. Bod X leží na uhlopriečke BD. Trojuholníky DAB a AXB sú oba pravouhlé a majú rovnaký vnútorný uhol pri spoločnom vrchole B. Tieto trojuholníky sú teda podobné, a preto platí

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|AX|}{|XB|}, \qquad \text{čiže} \qquad \frac{y}{13} = \frac{5}{12}.$$

Odtiaľ $y = 65/12$ a záver je rovnaký ako v predošlom riešení.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	1. M. Mach, 2. K. Pazourek, 3. M. Mach, 4. K. Pazourek, 5. L. Šimůnek, 6. M. Mach
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Trojáková
Redakčná úprava:	Erika Trojáková, Vojtěch Žádník
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011