MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh domáceho kola kategórie C

1 Koľko z 2022 zlomkov

$$\frac{0}{2022}, \frac{1}{2021}, \frac{2}{2020}, \dots, \frac{2021}{1}$$

má celočíselnú hodnotu?

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie:

Menovatele zadaných zlomkov sú prirodzené čísla od 1 do 2022. Pritom zlomok s daným menovateľom j má čitateľ c určený rovnosťou $c + j = 2022$, teda $c = 2022 - j$. Naše zlomky preto majú vyjadrenie $\frac{2022-j}{j}$, t. j.

$$\frac{2022}{j} - 1,$$

pričom j je postupne 2022, 2021, …, 1. (Hodnoty menovateľov j sme vypísali zostupne, ako je to pri zlomkoch v zadaní.)

Podľa zadania je našou úlohou určiť, koľko zo všetkých menovateľov j delí príslušného čitateľa $2022 - j$. Vďaka vykonanej úprave je naša úloha zjednodušená: hľadáme počet tých j od 1 do 2022, ktoré sú deliteľmi čísla 2022.

Keďže číslo 2022 má prvočíselný rozklad $2 \cdot 3 \cdot 337$, jeho delitele sú práve čísla 1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011 a 2022, ktorých je celkom 8. To sú teda menovatele j všetkých uvažovaných zlomkov s celočíselnými hodnotami. Ich čitatele c sú podľa vzťahu $c = 2022 - j$ postupne čísla 2021, 2020, 2019, 2016, 1685, 1348, 1011 a 0.

Poznámka:

Zdôraznime, že v úplnom riešení súťažnej úlohy nie je nutné vypisovať 8 zlomkov požadovanej vlastnosti. Namiesto toho je možné využiť fakt, že každé n tvaru $n = pqr$, kde p, q, r sú navzájom rôzne prvočísla, má práve 8 deliteľov. Ich konkrétny výpis je možné nahradiť kombinatorickou úvahou: Pre číslo n uvedeného tvaru zostavíme jeho ľubovoľný deliteľ d tak, že sa pre každé z troch prvočísel p, q, r rozhodneme, či ho do rozkladu d na prvočinitele zaradiť alebo nie. (Ak napríklad nezaradíme žiadne z nich, dostaneme deliteľ 1.) Celkový počet možností, ako deliteľ zostaviť, je preto rovný $2 \cdot 2 \cdot 2$ čiže 8 – ako sme totiž uviedli, pre každé z troch prvočísel p, q, r máme 2 možnosti: buď ho zaradíme, alebo nie.

---

2 Žiačka má z päťminútoviek priemer známok presne 1,12. Dokážte, že z nich má aspoň 22 jednotiek. (Možné známky sú 1, 2, 3, 4, 5.)

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Najskôr vysvetlíme, prečo viac ako polovica známok žiačky sú jednotky. Vyjdeme zo zrejmého poznatku, že ak niektorú známku nahradíme lepšou známkou, priemer známok sa tiež zlepší. Keby preto jednotiek bola najviac polovica, tak by sme po prípadnom nahradení známok 3, 4, 5 (ak nejaké existujú) lepšími dvojkami dostali priemer aspoň 1,5, teda horší ako 1,12. Jednotiek teda skutočne musí byť viac ako polovica zo všetkých známok.

Označme teraz s súčet všetkých známok a p ich počet, obe čísla s a p sú zrejme prirodzené. Z rovnosti $s/p = 1{,}12 = 28/25$ máme $25s = 28p$, takže vzhľadom na nesúdeliteľnosť čísel 25 a 28 platí, že p je násobok čísla 25. Keby teda platilo $p > 25$, mali by sme $p \geq 50$, a tak by jednotiek bolo (podľa prvého odseku) viac ako 25. Zostáva preto posúdiť prípad, keď $p = 25$ a $s = 28$. Keby pritom jednotiek bolo najviac 21, bol by počet horších známok aspoň $25 - 21$ čiže 4, a tak by platilo $s \geq 21 + 4 \cdot 2 = 29$, a to je spor. Preto aj v prípade $p = 25$ muselo jednotiek byť aspoň 22.

Poznámka:

Aj keď to zadanie úlohy nevyžaduje, ukážme, že žiačka mohla mať z päťminútoviek *práve* 22 jednotiek, a to v jedinom prípade, keď okrem nich mala už len 3 dvojky. Zachovajme označenie nášho riešenia. Podľa neho v prípade 22 jednotiek muselo byť $p = 25$ a $s = 28$, takže známky horšie ako 1 boli práve tri a ich súčet bol $28 - 22$ čiže 6, t. j. išlo o 3 dvojky.

Riešenie 2:

Označme počet jednotiek, dvojok, trojok, štvoriek a pätiek postupne a, b, c, d, e. Potom platí

$$\frac{1a+2b+3c+4d+5e}{a+b+c+d+e}=1{,}12=\frac{112}{100}=\frac{28}{25}.$$

Posledný zlomok v je v základnom tvare, takže platí

$$a+2b+3c+4d+5e=28k$$

a

$$a+b+c+d+e=25k$$

pre vhodné kladné prirodzené číslo k. Z týchto dvoch rovností vylúčime hodnotu b, a to tak, že od dvojnásobku druhej rovnice odpočítame prvú rovnicu. Dostaneme

$$2(a+b+c+d+e)-(a+2b+3c+4d+5e)=2\cdot 25k-28k,$$

odkiaľ po úprave vychádza

$$a=22k+c+2d+3e.$$

Vďaka zrejmej nerovnosti $c+2d+3e\geq 0$ (čísla c, d, e sú totiž nezáporné) už dostávame $a\geq 22k\geq 22$.

Poznámka:

Opäť tiež vidíme, že rovnosť $a=22$ nastane práve vtedy, keď bude platiť $k=1$ a $c+2d+3e=0$, t. j. $c=d=e=0$ a $b=3$.

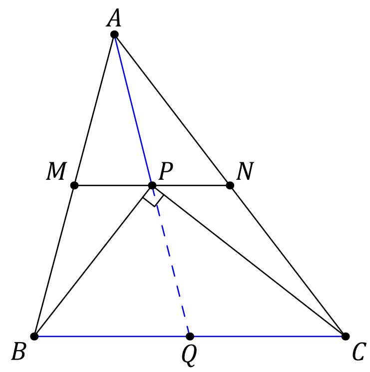
---

3 V trojuholníku ABC označme M stred strany AB, N stred strany AC a P stred úsečky MN. Dokážte, že ak $|MN|=|AP|$, tak $BP\perp CP$.

(Patrik Bak, Eliška Macáková)

Riešenie:

Označme Q priesečník priamky AP s úsečkou BC.



Obrázok nám napovedá, že P je stred úsečky AQ a Q je stred úsečky BC. Odložme na chvíľu dôkaz týchto dvoch faktov a ukážme najskôr, ako z nich vyplýva tvrdenie úlohy. Predpokladajme teda, že platí rovnosť $|MN|=|BQ|=|CQ|$ a $|AP|=|PQ|$. Podľa zadania úlohy platí však aj rovnosť $|MN|=|AP|$. Dokopy tak dostávame, že úsečky BQ, CQ a PQ sú zhodné. Bod P preto leží na tej kružnici so stredom v bode Q, ktorej priemerom je úsečka BC. Podľa Tálesovej vety to už znamená, že uhol BPC je pravý.

Ukážeme teraz, že skutočne P je stred úsečky AQ a Q je stred úsečky BC. Úsečka MN je stredná priečka trojuholníka ABC, teda $MN\parallel BC$ a $|MN|=\frac{1}{2}|BC|$. Vďaka vzťahu $MN\parallel BC$ je trojuholník ABQ podobný trojuholníku AMP podľa vety uu. Pre dĺžky strán týchto podobných trojuholníkov tak z rovnosti $|AB|=2\cdot|AM|$ vyplýva $|AQ|=2\cdot|AP|$ a $|BQ|=2\cdot|MP|$. Podľa toho P je stred AQ a $|BQ|=2\cdot|MP|=|MN|=\frac{1}{2}|BC|$, čo znamená práve to, že Q je stred BC, ako sme chceli ukázať.

Poznámka:

Popíšme kratší spôsob ako ukázať, že P je stred úsečky AQ a Q je stred úsečky BC. Ak označíme Q' stred strany BC, tak z vlastností stredných priečok MQ' a NQ' trojuholníka ABC vyplýva, že štvoruholník $AMQ'N$ je rovnobežník. Jeho uhlopriečky MN a AQ' sa teda navzájom rozpoľujú, takže sa pretínajú v bode P (ktorý je zadaný ako stred úsečky MN). Odtiaľ vyplýva, že úsečka AQ' prechádza bodom P, a tak je nutne $Q'=Q$, t. j. Q je stred strany BC a P ako stred uhlopriečky AQ' je stredom úsečky AQ. (Dodajme, že potrebné vlastnosti bodov P a Q je možné okamžite získať použitím rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom 2.

4 Hráme nasledujúcu hru. Na začiatku je na stole k kôpok, na ktorých je postupne 1, 2, 3, …, k žetónov. V každom ťahu vyberieme ľubovoľné dve kôpky a odstránime z oboch rovnaký počet žetónov. Naším cieľom je, aby na stole zostal jediný žetón. Môže sa nám to podariť, ak

a) $k = 10$,

b) $k = 11$?

(Radek Horenský)

Riešenie:

a) Počty žetónov na kôpkach popíšeme desaticou, ktorú nazveme konfigurácia. Vyhovujúci postup je napríklad takýto:

0. Začiatočná konfigurácia je $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$.
1. Z 1. a 2. kôpky odoberieme po 1 žetóne, dostaneme konfiguráciu $(0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$.
2. Z 3. a 4. kôpky odoberieme po 3 žetónoch, dostaneme konfiguráciu $(0, 1, 0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$.
3. Z 5. a 6. kôpky odoberieme po 5 žetónoch, dostaneme konfiguráciu $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 7, 8, 9, 10)$.
4. Zo 7. a 8. kôpky odoberieme po 7 žetónoch, dostaneme konfiguráciu $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 9, 10)$.
5. Z 9. a 10. kôpky odoberieme po 9 žetónoch, dostaneme konfiguráciu $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$.
5. Z 2. a 4. kôpky odoberieme po 1 žetóne, dostaneme konfiguráciu $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$.
6. Zo 6. a 8. kôpky odoberieme po 1 žetóne, dostaneme konfiguráciu $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Na stole teda naozaj ostal jediný žetón.

b) Celkový počet žetónov na stole je na začiatku $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$ čiže 66, je teda párny. Keďže v každom ťahu odstraňujeme z dvoch kôpok rovnaký počet žetónov, ich celkový počet sa zmenší o párny počet, takže naďalej bude párny. To však znamená, že neexistuje postup, ktorým by sme zo stola odstránili všetky žetóny okrem jedného.

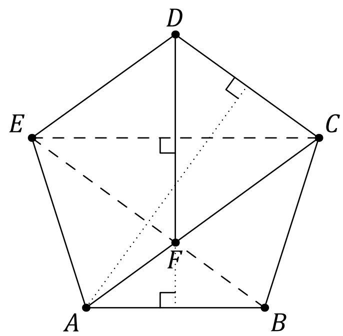
---

5 Nech $ABCDE$ je pravidelný päťuholník. Priesečník uhlopriečky AC s osou strany AB označme F. Dokážte, že trojuholníky ABC a CDF majú rovnaký obsah.

(David Hruška)

Riešenie:

Uvažujme súmernosť $ABCDE$ podľa tej jeho osi, ktorá prechádza vrcholom D, čo je zároveň aj os súmernosti rovnoramenného lichobežníka $ABCE$ so základňami AB a CE. Priesečník jeho uhlopriečok AC a BE preto leží na osi základne AB, je teda bodom F zo zadania úlohy.



Vieme teda, že bod F leží na uhlopriečke BE. Tá je však rovnobežná so stranou CD, a to vďaka súmernosti $ABCDE$ podľa jeho osi, ktorá tentoraz prechádza vrcholom A (pozri obrázok). Body F a E tak majú od priamky CD rovnakú vzdialenosť, a preto trojuholník CDF má rovnaký obsah ako trojuholník CDE, ktorý je však zhodný s trojuholníkom ABC. Tým je rovnosť obsahov trojuholníkov ABC a CDF dokázaná.

Poznámka:

V druhom odseku riešenia sme mohli postupovať inak: Podobne ako $BE \parallel CD$ platí tiež $AC \parallel ED$ (zo súmernosti $ABCDE$ podľa jeho osi idúcej vrcholom B), takže $CDEF$ je rovnobežník (dokonca kosoštvorec, pretože $|CD| = |DE|$), teda obsahy oboch trojuholníkov CDF a CDE sú rovnaké – rovnajú sa totiž polovici obsahu spomínaného rovnobežníka.

---

6 Určte najväčšie prirodzené číslo n také, že $n \geq 10$ a pre ľubovoľných 10 rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ platí nasledujúce tvrdenie: Ak nie je ani jedno z týchto 10 čísel prvočíslo, tak je súčet niektorých dvoch z nich prvočíslo.

(Ján Mazák)

Riešenie 1:

Ukážeme, že hľadané najväčšie n je rovné 21.

Najskôr overíme, že požadovanú vlastnosť nemá žiadne prirodzené číslo n väčšie než 21. Pre každé takéto n sú v dotyčnej množine $\{1, 2, \dots, n\}$ zastúpené párne čísla 4, 6, 8, …, 22, ktoré nie sú prvočísla (kvôli tomu sme vynechali najmenšie párne číslo 2) a ktorých je požadovaný počet 10. Keďže ani súčet žiadnych dvoch z 10 vypísaných čísel nebude prvočíslo (opäť pôjde o párne číslo väčšie ako 2), tvrdenie úlohy pre týchto 10 čísel neplatí. Preto skutočne nevyhovuje žiadne n väčšie než 21.

Teraz dokážeme, že 21 požadovanú vlastnosť má. Ak vyberieme z množiny $\{1, 2, \dots, 21\}$ ľubovoľných (ďalej pevných) 10 rôznych čísel, medzi ktorými nie je žiadne prvočíslo (inak nie je čo dokazovať), vyberieme vlastne 10 rôznych čísel z množiny $\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21\}$. Rozdelíme ju pre ďalšie účely na skupinu nepárnych čísel N a skupinu párnych čísel P:

$$N = \{1, 9, 15, 21\},$$

$$P = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.$$

Vidíme, že N má 4 prvky a P má 9 prvkov. Z toho vyplýva, že medzi 10 vybranými číslami je aspoň jedno číslo z N (lebo $10 - 9 = 1$) a aspoň 6 čísel z P (lebo $10 - 4 = 6$), teda z P nie sú vybrané najviac 3 čísla (lebo $9 - 6 = 3$). Inak povedané, z ľubovoľných štyroch čísel z P je aspoň jedno vybrané.

Rozlíšime teraz, ktoré z nepárnych čísel 1, 9, 15, 21 je vybrané (uvedené prípady sa nemusia vylučovať):

- Vybrané je číslo 1.

  Keďže $1 + 4$, $1 + 6$, $1 + 10$, $1 + 16$ sú prvočísla a *aspoň jedno zo štyroch* párnych čísel 4, 6, 10, 16 musí byť vybrané (podľa záveru predchádzajúceho odseku), tvrdenie úlohy pre vybraných 10 čísel platí.
- Vybrané je číslo 9.

  Podobne ako vyššie využijeme štyri súčty $9 + 4$, $9 + 8$, $9 + 10$, $9 + 14$.
- Vybrané je číslo 15.

  Tentoraz uplatníme štyri súčty $15 + 4$, $15 + 8$, $15 + 14$, $15 + 16$.
- Vybrané je číslo 21.

  V tomto prípade vhodné štyri súčty sú $21 + 8$, $21 + 10$, $21 + 16$, $21 + 20$.

Poznámka:

Existuje veľa iných spôsobov ako ukázať, že pri výbere ľubovoľných 10 rôznych čísel z množiny

$$\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21\}$$

bude súčet niektorých dvoch vybraných čísel prvočíslo. Obvykle je pri nich nutné rozobrať viac prípadov ako v našom riešení, avšak jeden rafinovaný postup žiadny rozbor v podstate nevyžaduje, a preto ho teraz popíšeme.

Rozdeľme túto množinu na 9 navzájom disjunktných podmnožín

$$\{1, 4\}, \{6\}, \{8, 9\}, \{10\}, \{12\}, \{14, 15\}, \{16\}, \{18\}, \{20, 21\}.$$

Keďže podmnožín je 9, pri výbere ľubovoľných 10 rôznych čísel musia byť zrejme vždy vybrané obe čísla z niektorej dvojprvkovej podmnožiny. Pre každú z nich je však súčtom jej prvkov prvočíslo.

Riešenie 2:

Budeme riešiť inverznú úlohu, a to hľadať najmenšie prirodzené číslo m s opačnou vlastnosťou, t. j. také, že $m \geq 10$ a existuje 10 čísel z množiny $\{1, 2, \dots, m\}$ takých, že ani jedno z nich nie je prvočíslo a ani súčet žiadnych dvoch z nich nie je prvočíslo. Je totiž zrejmé, ža ak takúto vlastnosť má nejaké číslo, majú ju aj všetky väčšie čísla (stačí zobrať tú istú desaticu). Ak bude nájdené najmenšie číslo m s touto vlastnosťou väčšie než 10, hľadané číslo zo zadania bude $m - 1$.

Všimnime si, že spomínanú opačnú vlastnosť má číslo 22. Stačí totiž zobrať práve čísla z množiny

$$\{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}.$$

Všetky sú totiž párne a väčšie od 2 a to isté platí aj pre ich súčty.

Ukážeme sporom, že číslo 21 túto opačnú vlastnosť nemá (a teda ju nemá ani žiadne menšie číslo). Nech teda existuje desať čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 21\}$ takých, že prvočísla nie sú ani ony a ani súčty žiadnych dvoch z nich. Prvá podmienka znamená práve to, že čísla budú z množiny

$$\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21\}.$$

Je ich 13, takže môžeme vyradiť najviac 3 z nich.

Avšak súčty 4 disjunktných dvojíc $\{1, 6\}$, $\{4, 9\}$, $\{8, 15\}$, $\{10, 21\}$ sú prvočísla (7, 13, 23, 31), takže z každej z nich musíme vyradiť aspoň jedno číslo. To však znamená, že žiadna vyhovujúca desatica neexistuje. To je však spor.

Zhrnutím dostávame, že riešenie inverznej úlohy je 22, a teda riešenie pôvodnej úlohy je 21.