MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh domáceho kola kategórie B

1 Na tabuľu napíšeme desať navzájom rôznych kladných celých čísel. V každom kroku najskôr podčiarkneme každé číslo, ktoré nie je súčtom žiadnych dvoch rôznych čísel napísaných na tabuli, a potom všetky podčiarknuté čísla zotrieme.

a) Dokážte, že pre ľubovoľných desať napísaných čísel zostane po konečnom počte krokov tabuľa prázdna.

b) Určte najväčší počet krokov, po ktorých vykonaní ešte nemusí zostať tabuľa prázdna. Uveďte príklad desiatich čísel, pre ktoré tento počet dosiahneme.

(Patrik Bak)

Riešenie:

a) Všetky čísla na tabuli sú podľa zadania kladné a rôzne. V každom kroku preto určite podčiarkneme najmenšie číslo na tabuli a – pokiaľ nie je na tabuli jediné – aj druhé najmenšie, lebo ani ono sa nemôže rovnať súčtu dvoch rôznych čísel na tabuli. Keďže v každom kroku tak nejaké číslo zotrieme, po konečnom počte krokov bude tabuľa prázdna, ako sme mali dokázať.

b) Najskôr poznamenajme, že tabuľa zostane prázdna po najviac 5 krokoch. To je podľa časti a) zrejmé, ak v žiadnom kroku nebude zotreté iba jedno číslo. Krok s jedným zotretým číslom však môže byť iba jeden, a to ten posledný, predchádzajúcich krokov vtedy však nemôže byť viac ako 4.

Teraz uvedieme príklad desiatich východiskových čísel, pre ktoré tabuľa po štvrtom kroku ešte prázdna nebude. To určite nastane, ak v každom zo štyroch krokov budú zotreté len dve čísla (tie najmenšie). (V jednom z nich by mohli byť zotreté aj tri čísla, ale túto možnosť pri našej konštrukcii neuvažujeme.) Na to musí byť každé väčšie číslo (t. j. od tretieho najmenšieho) vždy rovné súčtu dvoch rôznych (menších) čísel, ktoré sa na tabuli doposiaľ nachádzajú. To nás motivuje uvážiť postupnosť kladných celých čísel, v ktorej je každé nasledujúce číslo rovné súčtu dvoch predchádzajúcich. Ak zvolíme napríklad za prvé dve čísla 1 a 2, bude tretie číslo $1 + 2$ čiže 3, štvrté $2 + 3$ čiže 5 atď. Vypíšme prvých desať týchto čísel (ktoré sa nazývajú *Fibonacciho*):

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.$$

Ak budú na začiatku napísané na tabuli práve tieto čísla, tak v každom zo štyroch krokov zrejme zotrieme iba dve čísla. Potvrďme to aj zápisom týchto krokov:

$$(\underline{1}, \underline{2}, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89) \to (\underline{3}, \underline{5}, 8, 13, 21, 34, 55, 89) \to (\underline{8}, \underline{13}, 21, 34, 55, 89)$$
$$\to (\underline{21}, \underline{34}, 55, 89) \to (\underline{55}, \underline{89}).$$

Hľadaný najväčší počet krokov je teda 4.

2 Označme M počet všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Ďalej označme N počet takýchto vyplnení, kde sú navyše súčty všetkých čísel v každom riadku aj stĺpci nepárne čísla. Určte hodnotu $N : M$.

(Jaromír Šimša)

Riešenie:

Počet M všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 číslami od 1 do 9 je zrejme 9!.

Aby sme určili počet N, zaoberajme sa najskôr otázkou, ako v tabuľke 3×3 vybrať pozície pre párne a nepárne čísla, aby vyplnená tabuľka mala súčet troch čísel v každom riadku aj stĺpci nepárny. Pozície pre nepárne čísla označíme n, pozície pre párne p.

Uvedomme si, že súčet troch čísel je nepárne práve vtedy, keď medzi sčítancami je buď jedno nepárne, alebo tri nepárne. Preto je nejaké vyplnenie tabuľky vyhovujúce práve vtedy, keď v ľubovoľnom riadku aj stĺpci je buď jedno, alebo tri n. Keďže medzi číslami od 1 do 9 je päť n (a štyri p), sú počty n v jednotlivých riadkoch zrejme rovné 1, 1, 3 (v akomkoľvek poradí). To isté platí pre počty n v jednotlivých stĺpcoch. Oboje nastane práve vtedy, keď všetkých päť n vypĺňa zjednotenie jedného riadka a jedného stĺpca (všetky štyri políčka mimo tohto zjednotenia potom vypĺňajú p).

Keďže riadok s tromi n je možné vybrať 3 spôsobmi a rovnako tak stĺpec s tromi n je možné vybrať 3 spôsobmi, existuje práve $3 \cdot 3$ čiže 9 vyhovujúcich vyplnení tabuľky 3×3 piatimi n a štyrmi p. Pri každom takom vyplnení potom päť znakov n môžeme nahradiť číslami 1, 3, 5, 7, 9 práve 5! spôsobmi, štyri znaky p potom číslami 2, 4, 6, 8 práve 4! spôsobmi. Na nahradenie všetkých znakov v jednej tabuľke tak máme 5! · 4! možností, pritom východiskových tabuliek je 9. Odtiaľ už vychádza $N = 9 \cdot 5! \cdot 4!$.

Potom

$$\frac{N}{M} = \frac{9 \cdot 5! \cdot 4!}{9!} = \frac{9 \cdot 5! \cdot 24}{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{14}.$$

Poznámka:

V našom riešení sme vlastne postupovali tak, že sme každé vyplnenie tabuľky 3×3 číslami od 1 do 9 „zakódovali“ ako tabuľku 3 × 3 vyplnenú piatimi n a štyrmi p, podľa ktorej je možné rozhodnúť, či je východiskové vyplnenie vyhovujúce (alebo nie). Je zrejmé, že jedna taká tabuľka s piatimi n a štyrmi p zodpovedá rovnakému počtu východiskových vyplnení (v riešení sme ten počet 5! · 4! určili). Hľadaný pomer $N : M$ by sme preto mohli hľadať ako pomer menších čísel $N' : M'$, kde M' je počet všetkých rozmiestnení piatich znakov n do políčok tabuľky 3 × 3 a N' je počet ich vyhovujúcich rozmiestnení. Z kombinatoriky je známe, že

$$M' = \binom{9}{5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 14$$

a z nášho riešenia vieme, že $N' = 9$. Tým pádom

$$\frac{N}{M} = \frac{N'}{M'} = \frac{9}{9 \cdot 14} = \frac{1}{14}.$$

---

3 Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel také, že každá z rovníc

$$a(x^2 + ax + b) + b(x^2 + bx + a) = 0,$$
$$a(x^2 + bx + a) + b(x^2 + ax + b) = 0$$

je kvadratická rovnica s dvojnásobným koreňom.

(Jaroslav Švrček)

Riešenie 1:

Obe zadané rovnice upravíme na štandardný tvar

$$(a + b)x^2 + (a^2 + b^2)x + 2ab = 0,$$

resp.

$$(a + b)x^2 + 2abx + (a^2 + b^2) = 0.$$

Vidíme, že v prípade $a + b = 0$ nie sú tieto rovnice kvadratické, čo odporuje zadaniu. Platí teda $a + b \neq 0$.

Ako vieme, kvadratické rovnice majú dvojnásobné korene práve vtedy, keď sú ich diskriminanty nulové. V prípade našich rovníc tak dostaneme sústavu rovníc

$$(a^2 + b^2)^2 - 4(a + b) \cdot 2ab = 0,$$
$$(2ab)^2 - 4(a + b)(a^2 + b^2) = 0,$$

ktorú prepíšeme na tvar

$$(a^2 + b^2)^2 = 8(a + b)ab,$$
$$(a + b)(a^2 + b^2) = a^2b^2.$$

Vynásobme prvú rovnicu výrazom $a^2 + b^2$ (nenulovým vďaka podmienke $a + b \neq 0$). Dostaneme rovnicu

$$(a^2 + b^2)^3 = 8(a^2 + b^2)(a + b)ab.$$

Podľa druhej rovnice potom

$$(a^2 + b^2)^3 = 8a^3b^3,$$

a po úpravách

$$(a^2 + b^2)^3 = (2ab)^3,$$
$$a^2 + b^2 = 2ab,$$
$$(a - b)^2 = 0,$$

čo nastane len v prípade $a = b$. Z toho už dostávame

$$(a^2 + a^2)^2 = 8(a + a)a^2,$$

po úprave

$$a^3(a - 4) = 0.$$

Vychádzajú tak len dve možnosti – dvojica (a, b) je buď $(0, 0)$, alebo $(4, 4)$. Keďže dvojica $(0, 0)$ odporuje odvodenej podmienke $a + b \neq 0$, ostáva len dvojica $(4, 4)$. Tá je naozaj riešením našej úlohy, pretože vtedy sú oba uvažované diskriminanty nulové.

Poznámka:

Aj keď to nie je nevyhnutné, poznamenajme, že v prípade $a = b = 4$ majú obe rovnice zo zadania po úprave na ten istý tvar $8x^2 + 32x + 32 = 0$, čo je rovnica s dvojnásobným koreňom -2.

Riešenie 2:

Opäť vyjadrime zadané rovnice v štandardnom tvare

$$(a + b)x^2 + (a^2 + b^2)x + 2ab = 0,$$
$$(a + b)x^2 + 2abx + (a^2 + b^2) = 0.$$

a poznamenajme, že musí platiť $a + b \neq 0$, aby išlo o kvadratické rovnice. Namiesto počítania s diskriminantmi teraz využijeme iný známy poznatok o tom, že kvadratická rovnica $px^2 + qx + r = 0$ má dvojnásobný koreň t práve vtedy, keď $px^2 + qx + r = p(x - t)^2$. Našou úlohou je tak nájsť práve tie dvojice (a, b), kde $a + b \neq 0$ a

$$(a + b)x^2 + (a^2 + b^2)x + 2ab = (a + b)(x + u)^2,$$
$$(a + b)x^2 + 2abx + (a^2 + b^2) = (a + b)(x + v)^2$$

s vhodnými reálnymi číslami u, v (dvojnásobnými koreňmi rovníc potom budú čísla $-u$, resp. $-v$). Keďže rovnosti koeficientov pri mocninách x^2 sú v oboch týchto rovniciach splnené automaticky, stačí ekvivalentne vypísať a ďalej uvažovať iba rovnosti koeficientov pri mocninách x^1 a x^0:

$$a^2 + b^2 = 2(a + b)u,$$
$$2ab = 2(a + b)v,$$

resp.

$$2ab = (a + b)u^2,$$
$$a^2 + b^2 = (a + b)v^2.$$

Najprv si uvedomíme, že z $a + b \neq 0$ vyplýva $a^2 + b^2 \neq 0$, teda platí aj $u, v, a, b \neq 0$. Porovnaním dostávame rovnice $2u = v^2$ a $u^2 = 2v$. Ich vynásobením dostaneme $2u^3 = 2v^3$, čiže $u = v$, a preto z $2u = v^2$ vzhľadom na $u \neq 0$ máme $u = v = 2$. Z toho

$$a^2 + b^2 = 4(a + b) = 2ab.$$

Z rovnosti krajných výrazov však máme $(a - b)^2 = 0$, t. j. $a = b$, takže $4(a + b) = 2ab$ znamená $8a = 2a^2$, odkiaľ už vzhľadom na $a \neq 0$ dostávame jedinú vyhovujúcu dvojicu $(4, 4)$.

Poznámka:

Ani pri tomto riešení nie je skúška nutná.

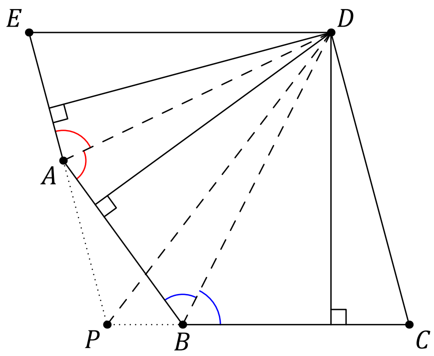
---

4 V konvexnom päťuholníku $ABCDE$ platí $BC \parallel ED$, $AE \parallel CD$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle EAD|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ABD|$. Dokážte, že $|CD| = |ED|$.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

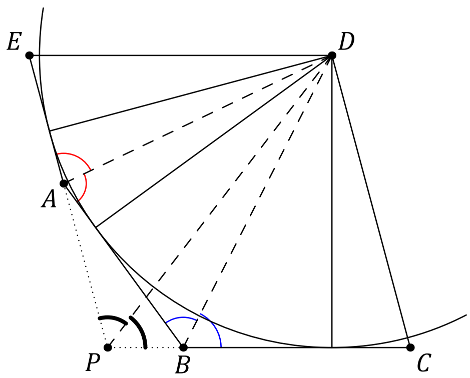
Keďže priamky BC, CD sú rôznobežné a podľa zadania platí $AE \parallel CD$, priamky BC a AE sú rôznobežné. Označme P ich priesečník. Zo zadaných podmienok rovnobežnosti vyplýva, že $PCDE$ je rovnobežník, v ktorom je A vnútorný bod strany PE a B je vnútorný bod strany PC.



Našou úlohou je dokázať rovnosť $|CD| = |ED|$, t. j. ukázať, že zostrojený rovnobežník $PCDE$ je kosoštvorec. Využijeme na to známy vzorec pre obsah rovnobežníka, podľa ktorého stačí overiť, že výšky z vrcholu D na strany PC a PE sú zhodné (potom sú totiž zhodné aj tieto susedné strany rovnobežníka). Inak povedané, máme overiť, že bod D má rovnakú vzdialenosť od priamok BC a AE. Z rovnosti $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$ však vyplýva, že bod D leží na osi konvexného uhla BAE, takže má bod D rovnakú vzdialenosť od priamok AE a AB. Podobne z rovnosti $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$ vyplýva, že bod D má rovnakú vzdialenosť od priamok AB a BC. Dokopy dostávame, že bod D má rovnakú vzdialenosť od priamok BC a AE, ako sme chceli ukázať.

Riešenie 2:

Rovnako ako v prvom riešení uvážime rovnobežník $PCDE$ a iným spôsobom overíme, že to je kosoštvorec. Namiesto vzorca pre jeho obsah využijeme poznatky o kružniciach pripísaných stranám všeobecného trojuholníka.



V prvom riešení sme vyšli z toho, že bod D leží na osiach konvexných uhlov BAE a ABC. Inak vyjadrené, bod D leží na osiach vonkajších uhlov pri vrcholoch A a B trojuholníka APB. Kružnica pripísaná jeho strane AB má teda stred práve v bode D, takže D leží tiež na osi (vnútorného) uhla pri vrchole P tohto trojuholníka. Tento uhol APB je však totožný s uhlom EPC, takže vrchol D rovnobežníka $PCDE$ leží na osi jeho vnútorného uhla pri vrchole P, ide preto naozaj o kosoštvorec.

Riešenie 3:

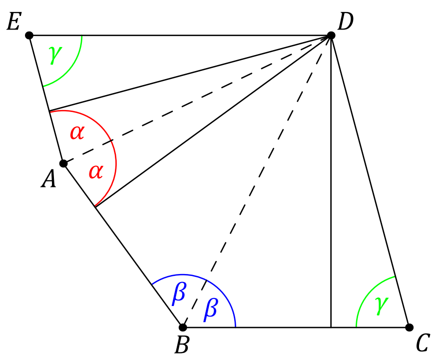
Na obrázku sú vyznačené uhly α, β a γ určené rovnosťami

$$\alpha = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|,$$

$$\beta = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|,$$

$$\gamma = |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle AED|$$

(zhodnosť dvojice uhlov DCB a AED platí vďaka rovnobežnostiam zo zadania).



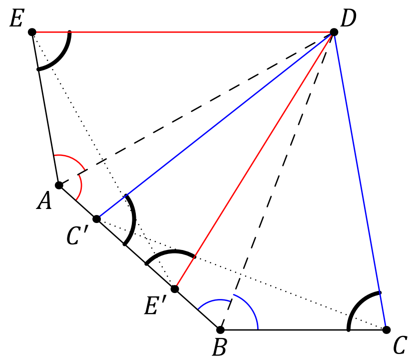
Použitím sínusovej vety v trojuholníkoch BCD, ADE a ABD dostaneme postupne rovnosti

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$
$$\frac{|DE|}{|AD|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},$$
$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Vynásobením týchto troch rovností dostaneme $\frac{|DE|}{|CD|} = 1$, t. j. $|CD| = |ED|$, ako sme mali dokázať.

Riešenie 4:

Obraz C' bodu C v osovej súmernosti podľa priamky BD leží na polpriamke BA tak, že $|C'D| = |CD|$ a $|\sphericalangle DC'B| = |\sphericalangle DCB|$. Podobne obraz E' bodu E v osovej súmernosti podľa priamky AD leží na polpriamke AB tak, že $|E'D| = |ED|$ a $|\sphericalangle DE'A| = |\sphericalangle DEA|$.



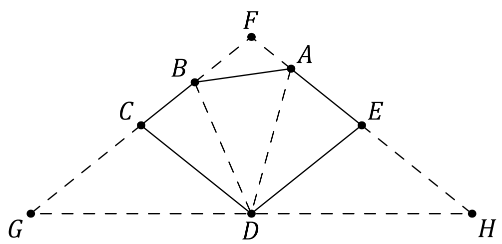
Ak je $C' = E'$, sme hotoví, lebo vtedy $|CD| = |C'D| = |E'D| = |ED|$. Rovnaká séria rovností platí aj v prípade $C' \neq E'$, pretože trojuholník $DC'E'$ má zhodné uhly pri vrcholoch C' a E'. Z rovnobežností $BC \parallel ED$ a $AE \parallel CD$ totiž vyplýva zhodnosť uhlov DCB a DEA, a teda aj uhlov $DC'B$ a $DE'A$, ktoré sú oba vnútorné alebo oba vonkajšie uhly trojuholníka $DC'E$ – keby jeden z ich bol vnútorný uhol a druhý vonkajší uhol, mal by ten prvý menšiu veľkosť.

Poznámka:

Upozornime, že body A, B, C', E' môžu ležať na priamke v iných poradiach ako na obrázku, preto sa nestačí odkázať na to, čo je z (jedného) obrázku „vidno".

Riešenie 5:

Keďže CD a ED sú rôznobežky, aj s nimi rovnobežné AE a BC sú rôznobežky. Nech F je ich priesečník. Nech G a H sú body také, že oba trojuholníky BDG a HDA sú (pri zachovaní poradia označenia vrcholov) súhlasne podobné s trojuholníkom BAD, koeficienty týchto podobností označme k a l. Podľa podmienok zo zadania potom G leží na polpriamke BC a H na polpriamke AE.



Z týchto podobností

$$|\sphericalangle GDH| = |\sphericalangle GDB| + |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ADH| = |\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ABD| = 180°,$$

bod D teda leží na úsečke GH.

Opäť z týchto podobností

$$|\sphericalangle FGH| = |\sphericalangle BGD| = |\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle DHA| = |\sphericalangle GHF|,$$

trojuholník FGH je teda rovnoramenný so základňou GH.

Opäť z týchto podobností máme

$$|GD| = k\,|AD| = kl\,|AB|$$

a analogicky

$$|HD| = l\,|DB| = lk\,|AB|\,,$$

z čoho $|GD| = |HD|$.

Zhrnutím dostávame, že D je stred GH, takže FGH je súmerný podľa osi FD. Potom uhlopriečka FD rozpoľuje uhol rovnobežníka $CDEF$, je to teda kosoštvorec. Z toho už vyplýva $|CD| = |ED|$.

---

5 a) Pre každé prvočíslo p uveďte príklad kladných celých čísel a, b, c takých, že $ab = c^2$ a $a + b - 2c = p$.

b) Dokážte, že pre ak a, b, c sú kladné celé čísla také, že $ab = c^2$, tak $a + b + 2c$ je zložené číslo.

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

a) Skúšaním malých hodnôt a, b, c môžeme nájsť napríklad trojicu $(4, 1, 2)$, ktorá vyhovuje podmienke $ab = c^2$ a zároveň pre ňu platí rovnosť $a + b - 2c = 1$. Ak teraz vynásobíme každé z týchto čísel a, b, c daným prvočíslom p, podmienka $ab = c^2$ zostane zachovaná a hodnota výrazu $a+b-2c$ sa zmení z 1 na p. Dostávame tak príklad trojice $(4p, p, 2p)$, ktorá má požadované vlastnosti.

b) Označme d najväčší spoločný deliteľ čísel a, b. Potom $a = a'd$ a $b = b'd$, pričom a' a b' sú nesúdeliteľné kladné celé čísla. Keďže ab má byť druhou mocninou kladného celého čísla c, z rovnosti $c^2 = ab = (a'b')d^2$ vyplýva, že aj $a'b'$ musí byť druhou mocninou kladného celého čísla. To znamená, že samotné čísla a', b' musia byť druhými mocninami nejakých kladných celých čísel u a v, t. j. $a' = u^2$ a $b' = v^2$. Platí teda $a = u^2d$ a $b = v^2d$. Po dosadení do rovnosti $ab = c^2$ dostaneme $(uvd)^2 = c^2$, odkiaľ $c = uvd$. Každé riešenie (a, b, c) rovnice $ab = c^2$ v obore kladných celých čísel má tak tvar (u^2d, v^2d, uvd). Platí teda

$$a + b + 2c = u^2d + v^2d + 2uvd = (u + v)^2d.$$

Keďže $u, v \geq 1$, platí $u + v \geq 2$. Číslo $(u + v)^2$ čiže $a + b + 2c$ je teda zložené, čo sme mali dokázať.

Poznámka:

Možno dokázať, že každá trojica (a, b, c) vyhovujúca zadaniu časti a) je daná vzťahmi

$$\{a, b\} = \{(n + 1)^2p, n^2p\}$$

a

$$c = n(n + 1)p,$$

pričom n je ľubovoľné kladné celé číslo. Napríklad v prípade $n = 1$ dostávame za podmienky $a > b$ trojicu $(4p, p, 2p)$.

Riešenie 2:

Najprv dokážeme tvrdenie z časti b), a to sporom. Uvedomme si, že číslo $a + b + 2c$ je aspoň 4, takže nie je zložené práve vtedy, keď je prvočíslo. Pripusťme teda, že existuje niektorá trojica (a, b, c) a prvočíslo p také, že $a + b + 2c = p$. Potom $a + b = p - 2c$, odkiaľ umocnením a využitím rovnosti $ab = c^2$ dostaneme

$$\begin{aligned}
(a + b)^2 &= p^2 - 4pc + 4c^2 = p^2 - 4pc + 4ab,\\
a^2 + 2ab + b^2 &= p^2 - 4pc + 4ab,\\
a^2 - 2ab + b^2 &= p^2 - 4pc,\\
(a - b)^2 &= p(p - 4c).
\end{aligned}$$

Prvočíslo p je teda deliteľom čísla $a - b$. Ak by sa však kladné čísla a, b navzájom líšili o nenulový násobok čísla p, mali by sme $a + b + 2c > a + b > p$, čo by bol spor. Preto platí $a = b$, takže z rovnosti $ab = c^2$ vyplýva $a = b = c$. Potom však $p = a + b + 2c = 4c$, teda prvočíslo p je násobkom 4 a to je spor.

Podobným postupom môžeme aj pre časť a) hľadať k danému prvočíslu p trojicu (a, b, c) spĺňajúcu rovnosť $a + b - 2c = p$. Jej úpravou tentoraz dostaneme $(a - b)^2 = p(p + 4c)$. Odtiaľ opäť vyplýva, že čísla a, b sa líšia o násobok čísla p, t. j. $a = b + kp$ pre vhodné celé číslo. Po dosadení za a do rovnosti $a + b - 2c = p$ dostaneme po úprave $2(c - b) = (k - 1)p$. Vidíme, že v prípade $k = 3$ bude rovnosť $2(c - b) = (k - 1)p$ splnená, pokiaľ bude platiť $c - b = p$, t. j. $c = b + p$. Po dosadení do rovnosti $ab = c^2$ dostaneme

$$\begin{aligned}
(b + 3p)b &= (b + p)^2,\\
b^2 + 3bp &= b^2 + 2bp + p^2,\\
bp &= b^2,\\
p &= b.
\end{aligned}$$

Dostávame tak vyhovujúcu trojicu $(4p, p, 2p)$.

---

6 Daný je trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole B. Označme I stred kružnice jemu vpísanej, M stred prepony AC a X priesečník priamky IM s priamkou BC. Dokážte, že ak ležia body B, I, M, C na jednej kružnici, tak trojuholník ABX je rovnoramenný.

(David Hruška)

Riešenie 1:

Keďže trojuholník ABX je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole B a máme dokázať, že je navyše rovnoramenný, je naším cieľom odvodiť rovnosť $|AB| = |BX|$.

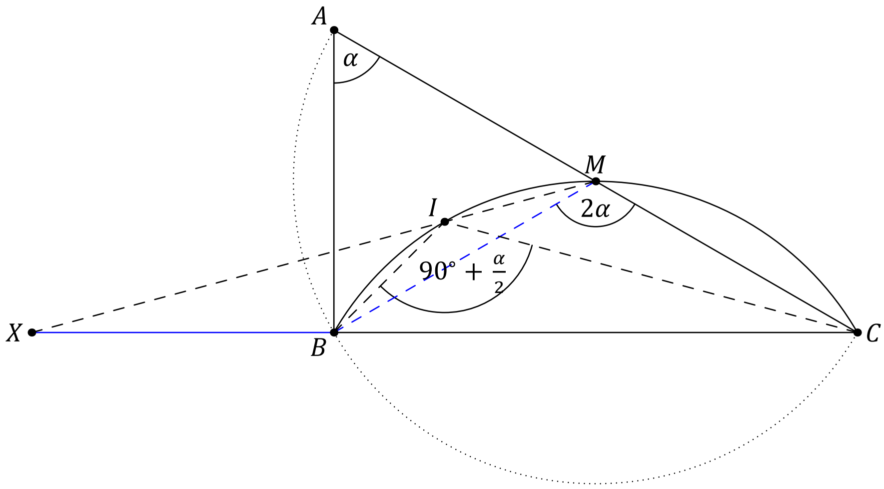
Označme k kružnicu, na ktorej podľa zadania ležia body B, I, M a C, a to zrejme v tomto poradí. Podľa vety o obvodových uhloch sú uhly BIC a BMC nad tetivou BC kružnice k zhodné. Ich veľkosti teraz vyjadríme pomocou veľkosti α vnútorného uhla pri vrchole A trojuholníka ABC, aby sme potom ich porovnaním uhol α určili.

Podľa Tálesovej vety je bod M stredom kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku ABC, teda vďaka vete o obvodovom a stredovom uhle platí $|\sphericalangle BMC| = 2\alpha$. Dodajme ešte jeden dôsledok Tálesovej vety, ktorý využijeme za chvíľu: Rovnosti $|MA| = |MB| = |MC|$ znamenajú, že oba trojuholníky ABM a BCM sú rovnoramenné.

Na určenie veľkosti uhla BIC využijeme to, že polpriamky BI a CI sú osami vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Preto pri štandardnom označení ich veľkostí dostávame

$$|\sphericalangle BIC| = 180° - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 90° + \tfrac{1}{2}\alpha.$$

(Nie je podstatné, že $\beta = 90°$, odvodený vzorec pre $|\sphericalangle BIC|$ platí pre každý trojuholník ABC.)



Zhodnosť uhlov BIC a BMC teda znamená, že platí $2\alpha = 90° + \frac{1}{2}\alpha$, čiže $\alpha = 60°$. Rovnoramenný trojuholník ABM je teda rovnostranný:

$$|AB| = |BM| = |MA|,$$

zatiaľ čo druhý rovnoramenný trojuholník BCM má pri základni BC vnútorné uhly veľkosti γ, t. j. $90° - \alpha$, t. j. $30°$.

Určené uhly teraz využijeme na výpočet niektorých ďalších uhlov v tetivovom štvoruholníku $BCMI$ s opísanou kružnicou k. Z rovností $|\sphericalangle BCM| = 30°$ a $|\sphericalangle IBC| = 45°$ dostávame

$$|\sphericalangle BMI| = |\sphericalangle BCI| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BCM| = 15°,$$
$$|\sphericalangle CMI| = 180° - |\sphericalangle IBC| = 135°.$$

Tým pádom

$$|\sphericalangle BCM| + |\sphericalangle CMI| = 30° + 135° = 165° < 180°,$$

odkiaľ vyplýva, že bod X zo zadania úlohy je spoločným bodom polpriamok CB, MI a že v trojuholníku CMX platí $|\sphericalangle MXC| = 180° - 165° = 15°$. Všimnime si ešte, že bod B je vnútorným bodom úsečky CX, lebo vďaka konvexnosti $BCMI$ leží v polrovine MIC. Preto platí

$$|\sphericalangle MXB| = |\sphericalangle MXC| = 15°$$

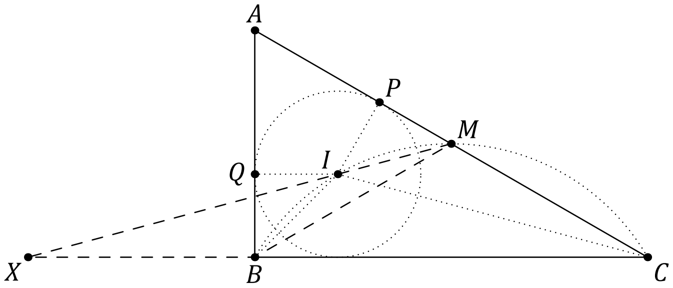
a

$$|\sphericalangle BMX| = |\sphericalangle BMI| = 15°.$$

Trojuholník BMX je teda rovnoramenný so základňou MX, takže $|BM| = |BX|$. Zhrnutím dostávame $|AB| = |BX|$.

Riešenie 2:

Nech P, Q sú päty kolmíc z I postupne na strany AC, AB.



Tetivy BI a IM kružnice opísanej štvoruholníku $BIMC$ prislúchajúce zhodným uhlom BCI a MCI sú tiež zhodné. Keďže $|QI| = |PI|$, pravouhlé trojuholníky MIP a BIQ sú (pri tomto poradí vrcholov) podľa vety *Ssu* zhodné, a teda $|QB| = |PM|$. Preto

$$|AB| = |AQ| + |QB| = |AP| + |PM| = |AM|\,.$$

Keďže M je stred Tálesovej kružnice nad priemerom AC a uhol ABC je pravý, B leží na tejto kružnici, a teda $|MA| = |MB|$. Zhrnutím dostávame, že MAB je rovnostranný.

Vyjadrime veľkosti uhlov trojuholníka MBX:

$$|\sphericalangle MBX| = |\sphericalangle MBA| + |\sphericalangle ABX| = 60° + 90° = 150°,$$

$$|\sphericalangle BMX| = |\sphericalangle BMI| = |\sphericalangle MBI| = |\sphericalangle MBA| - |\sphericalangle IBA| = |\sphericalangle MBA| - \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| = 60° - \frac{1}{2} \cdot 90° = 15°,$$

z čoho

$$|\sphericalangle BXM| = 180° - |\sphericalangle MBX| - |\sphericalangle BMX| = 180° - 150° - 15° = 15°.$$

To však znamená, že trojuholník MBX je rovnoramenný so základňou MX. Z toho už dostávame

$$|BX| = |BM| = |BA|\,,$$

takže trojuholník ABX je rovnoramenný.