MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh školského kola kategórie B

1 Označme M počet všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Ďalej označme D počet tých vyplnení, keď je navyše *súčin* čísel v niektorom riadku alebo stĺpci násobkom 10. Určte pomer $D : M$.

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Úlohu začneme riešiť výpočtom rozdielu $M - D$, teda počtu *zlých* vyplnení, pri ktorých súčin čísel v žiadnom riadku ani stĺpci tabuľky nie je násobkom 10. To nastane práve vtedy, keď s číslom 5 nie je v rovnakom riadku ani stĺpci žiadne párne číslo.

Pred týmto výpočtom najskôr ilustrujme situáciu príkladom jedného typu zlého vyplnenia. Pozície pre štyri párne čísla 2, 4, 6, 8 a štyri nepárne čísla 1, 3, 7 a 9 označíme písmenami p, resp. n:

p	n	p
p	n	p
n	5	n

Umiestnenie čísla 5 pre zlé vyplnenie môžeme zvoliť 9 spôsobmi. Pri každom z nich potom všetky štyri párne čísla 2, 4, 6, 8 musia ležať v políčkach mimo riadka i stĺpca umiestneného čísla 5. Také políčka sú práve štyri a na ne môžu byť párne čísla rozmiestnené akokoľvek, teda 4! spôsobmi. Ak máme také rozmiestnenie vybraté, tak čísla 1, 3, 7, 9 môžu byť na zvyšné štyri doposiaľ neobsadené políčka tiež rozmiestnené akokoľvek, teda opäť 4! spôsobmi. Platí teda

$$M - D = 9 \cdot 4! \cdot 4!.$$

Keďže navyše zrejme platí $M = 9!$, dokopy dostávame

$$1 - \frac{D}{M} = \frac{M - D}{M} = \frac{9 \cdot 4! \cdot 4!}{9!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{70},$$

odkiaľ

$$\frac{D}{M} = 1 - \frac{1}{70} = \frac{69}{70}.$$

Hľadaný pomer $D : M$ je rovný $69 : 70$.

Poznámka:

Po úvahe z prvého odseku je možné prejsť k ekvivalentnej úlohe o vypĺňaní tabuľky 3×3 jedným číslom 5, štyrmi písmenami n a štyrmi písmenami p. Pre zodpovedajúce hodnoty M' a D' pritom platí $M' = 9 \cdot \binom{8}{4}$ a $M' - D' = 9$. Táto obmena však neprináša oproti pôvodnému postupu žiadnu výhodu, navyše je potrebné spomínanú ekvivalenciu doložiť rovnosťami $M = (4!)^2 \cdot M'$ a $D = (4!)^2 \cdot D'$.

Riešenie 2:

Vyplnenie tabuľky 3×3 číslami 1, …, 9 nazveme *nepárnym*, ak je nepárny *súčet* troch čísel v každom riadku aj v každom stĺpci tabuľky. V riešení druhej úlohy domáceho kola sme ukázali, že nepárne sú práve tie vyplnenia, pri ktorých nepárne čísla 1, 3, …, 9 zaberajú jeden riadok a jeden stĺpec tabuľky, a že počet N všetkých nepárnych vyplnení je $M/14$.

Skúmajme opäť vyplnenia, ktoré sme v prvom riešení aktuálnej úlohy nazvali *zlé*. Tam sme úvahou o riadku a stĺpci s číslom 5 vlastne ukázali, že každé zlé vyplnenie je nepárne. Nie každé nepárne vyplnenie je však zlé, ako ukazuje nasledujúci príklad:

p	n	p
p	5	p
n	p	n

Ukážme, že nepárnych vyplnení je päťkrát viac ako zlých vyplnení. Naozaj, pre konštrukciu nepárnych vyplnení zvoľme najprv ten riadok a ten stĺpec, ktoré budeme vypĺňať nepárnymi číslami. Potom máme pre číslo 5 na výber 5 políčok, pritom na zlé vyplnenie povedie jediné z nich. (Po umiestnení čísla 5 potom pre zvyšné 4 nepárne čísla a všetky 4 párne čísla máme vždy rovnaký počet $4! \cdot 4!$ spôsobov, ako ich umiestniť.) (Absenciu tohto dodatku v zátvorke je možné v riešeniach tolerovať.) Platí preto $N = 5(M - D)$, čiže $M - D = N/5$, odkiaľ vzhľadom na $N = M/14$ dostávame $M - D = M/70$, teda $D = 69M/70$, čiže $D : M = 69 : 70$.

Riešenie 3:

V oboch predchádzajúcich riešeniach sme volili výhodnejší postup, keď sa vlastne počítajú vyplnenia, ktoré zadaniu úlohy *nevyhovujú*. Ukážeme teraz, že je schodná aj náročnejšia cesta priameho určenia počtu vyhovujúcich vyplnení. Sú to zrejme práve tie vyplnenia, pri ktorých sa niektoré párne číslo nachádza v rovnakom riadku alebo stĺpci tabuľky ako číslo 5.

Všetky vyhovujúce vyplnenia rozdelíme do skupín podľa toho, koľko je dokopy párnych čísel v tom riadku a v tom stĺpci tabuľky, v ktorých sa nachádza číslo 5. Tento počet označíme p a určíme, koľko vyplnení pre jednotlivé možné p od 1 do 4 existuje (ako už vieme, počet 0 majú práve tie vyplnenia, ktoré zadaniu úlohy nevyhovujú). Tieto počty zapíšeme vždy v tvare súčinu, ktorého prvý činiteľ bude 9 (počet spôsobov umiestnenia čísla 5), druhý činiteľ bude rovný počtu výberov p políčok pre párne čísla zdieľajúce s číslom 5 riadok alebo stĺpec, tretí činiteľ bude rovný počtu spôsobov vyplnenia už vybraných p políčok niektorými párnymi číslami, štvrtý činiteľ počtu spôsobov rozmiestnenia zvyšných $4-p$ párnych čísel do 4 políčok mimo riadka a stĺpca čísla 5 a napokon piaty činiteľ 4! bude rovný počtu spôsobov vyplnenia zvyšných 4 políčok nepárnymi číslami 1, 3, 7 a 9.

$$\begin{array}{lccccccccccl}
p=1: & 9 & \cdot & 4 & \cdot & 4 & \cdot & (4\cdot3\cdot2) & \cdot & 4! & = & 9\cdot(4!)^2\cdot16 \\
p=2: & 9 & \cdot & 6 & \cdot & (4\cdot3) & \cdot & (4\cdot3\cdot2) & \cdot & 4! & = & 9\cdot(4!)^2\cdot36 \\
p=3: & 9 & \cdot & 4 & \cdot & (4\cdot3\cdot2) & \cdot & 4 & \cdot & 4! & = & 9\cdot(4!)^2\cdot16 \\
p=4: & 9 & \cdot & 1 & \cdot & 4! & \cdot & 1 & \cdot & 4! & = & 9\cdot(4!)^2\cdot1
\end{array}$$

Preto platí

$$D = 9 \cdot (4!)^2 \cdot (16 + 36 + 16 + 1) = 9 \cdot (4!)^2 \cdot 69.$$

Dochádzame k výsledku

$$\frac{D}{M} = \frac{9 \cdot (4!)^2 \cdot 69}{9!} = \frac{4! \cdot 69}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{69}{70}.$$

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastkové kroky nasledovne:

- A0 Uvedenie hodnoty 9! pre počet M: 0 bodov.
- A1 Uvedenie príkladu nevyhovujúceho vyplnenia tabuľky (pričom je zjavné, že riešiteľ si túto jeho vlastnosť uvedomuje): 1 bod.
- B1 Charakterizácia *nevyhovujúcich* vyplnení tabuľky (t. j. vlastnosť rozmiestnenia ďalších čísel v závislosti na pozícii čísla 5): 3 body.
- B2 Určenie jednej z hodnôt $(M - D)/M$ alebo $M - D$ vrátane zdôvodnenia: 2 body, 1 bod za správnu metódu s numerickou chybou.
- C1 Uvedenie pomeru $N : M = 1 : 14$ z riešenia úlohy domáceho kola spolu s opisom nepárnych vyplnení (oboje možno vyhlásiť za známe): 1 bod.
- C2 Každé nevyhovujúce vyplnenie je nepárne: 2 body so zdôvodnením, 1 bod bez zdôvodnenia.
- C3 Uvedenie vzťahu $N = 5(M - D)$: 2 body so zdôvodnením, 1 bod bez zdôvodnenia.
- D1 Charakterizácia vyhovujúcich vyplnení tabuľky (t. j. vlastnosť rozmiestnenia ďalších čísel v závislosti na pozícii čísla 5): 1 bod.
- D2 Rozdelenie všetkých vyhovujúcich vyplnení do štyroch skupín podľa celkového počtu párnych čísel, ktoré zdieľajú s číslom 5 rovnaký riadok alebo stĺpec: 1 bod.
- D3 Určenie hodnoty D vrátane zdôvodnenia: 3 body, z toho 2 body za úplnosť metódy kombinatorického počítania a 1 bod za numerickú bezchybnosť.
- E Odpoveď zapísaná v tvare $69 : 70$ alebo $\frac{69}{70}$ alebo 69/70: 1 bod.

Celkovo potom dajte maximum z bodov z A1 a súčtu počtu bodov z E a maxima zo súčtu bodov z B1 a B2, zo súčtu bodov z C1, C2 a C3 a zo súčtu bodov z D1, D2 a D3.

---

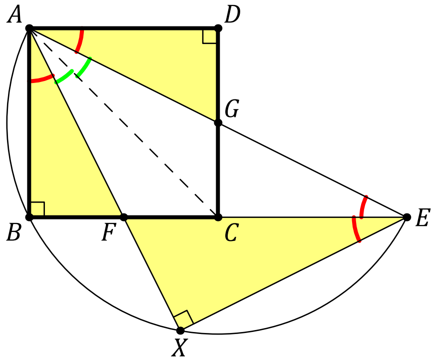
2 Daný je štvorec $ABCD$. Na polpriamke opačnej k CB leží bod E tak, že $|BC| = |CE|$. Označme F stred strany BC a X kolmý priemet bodu E na priamku AF. Dokážte, že bod C je stredom kružnice vpísanej trojuholníku AXE.

(David Hruška)

Riešenie 1:

Podľa zvyčajnej konštrukcie stredu vpísanej kružnice stačí dokázať, že bod C leží na osiach dvoch vnútorných uhlov trojuholníka AEX – tých pri vrcholoch A a E.

Najskôr si všimneme dve vlastnosti úsečky AE, ktorej priesečník so stranou CD označíme G: Striedavé uhly DAE a BEA sú zhodné (ako je vyznačené na obrázku) a bod G je zrejme stredom strany CD. (Dokázať to možno niekoľkými spôsobmi: úvahou o rovnobežníku $ACED$ alebo o strednej priečke trojuholníka ABE, prípadne použitím dvojice zhodných trojuholníkov DAG a CEG. Riešitelia však môžu tvrdenia považovať, rovnako ako my, za zrejmé a nedokazovať ich.)

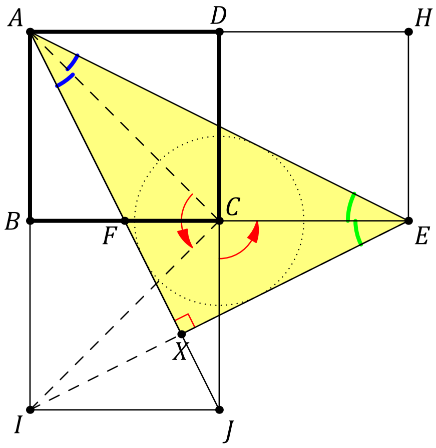


Keďže F a G sú stredy strán BC, resp. DC, zo súmernosti štvorca $ABCD$ podľa uhlopriečky AC vyplýva zhodnosť (podfarbených) trojuholníkov DAG a BAF. Preto je uhol DAG zhodný s (tretím červeno vyznačeným) uhlom BAF a vďaka súmernej združenosti bodov F a G podľa priamky AC leží bod C naozaj na osi uhla EAX (ako je na obrázku vyznačené zelenou).

Teraz si všimnime trojuholníky BAF a XEF s pravými uhlami pri vrcholoch B a X. Keďže sa zhodujú aj v uhle pri spoločnom vrchole F, sú zhodné aj ich tretie uhly BAF a XEF (preto je aj uhol XEF na obrázku vyznačený červenou). (Túto zhodnosť môžeme tiež odvodiť pomocou obvodových uhlov BAX a BEX v kružnici nad priemerom AE – tá je totiž opísaná štvoruholníku $ABXE$, pretože oba uhly ABE a AXE sú pravé.) Dokopy dostávame zhodnosť uhlov CEA a CEX, podľa ktorej bod C naozaj leží na osi uhla XEA.

Riešenie 2:

K zadanému štvorcu $ABCD$ a určenému bodu E ešte prikreslíme dva ďalšie štvorce $DCEH$ a $BIJC$ podľa obrázku. Stred F strany BC určite leží na úsečke AJ.



Uvažujme otočenie so stredom C a (orientovaným) pravým uhlom DCB. V ňom sa úsečka AJ zobrazí na na ňu kolmú úsečku IE, takže priesečníkom týchto dvoch úsečiek je bod X zo zadania úlohy (kolmý priemet bodu E na priamku AF čiže AJ).

Vlastné tvrdenie úlohy dokážeme ako v prvom riešení – overíme, že bod C leží na osiach dvoch vnútorných uhlov trojuholníka AEX.

Keďže body J a E sú súmerne združené podľa priamky AC, leží bod C na osi uhla JAE čiže XAE. Podobne zo súmernosti dvojice bodov A a I podľa priamky BE vyplýva, že jej bod C leží na osi uhla AEI čiže AEX.

Poznámka:

Ukážme, že otočenie so stredom C, ktoré sme využili v prvej časti riešenia, je možné použiť aj na iný dôkaz pre druhú časť. V tomto otočení totiž okrem $AJ \to IE$ platí rovnako $AE \to ID$. Preto existujú dve kružnice so stredom

C: Tej prvej sa dotýkajú úsečky AJ a IE, tej druhej zase úsečky EA a ID. Úsečky ID a IE sú však súmerne združené podľa priamky IC, teda obe spomínané kružnice splývajú v jednu, ktorá je preto vpísaná trojuholníku AEX.

Kvôli pokynom na bodovanie dodajme, že obe časti podaného riešenia sme mohli uviesť v opačnom poradí: Najprv označiť priesečník úsečiek EI a JA ako X' a ukázať, že bod C je stredom kružnice vpísanej trojuholníku AEX', až potom odvodiť rovnosť $X' = X$.

Riešenie 3:

Ukážeme, ako možno myšlienky z oboch predchádzajúcich riešení stručne podať použitím základných poznatkov o smerniciach priamok z analytickej geometrie.

Uvažujme karteziánsku sústavu súradníc s počiatkom A a kladnými polosami postupne AB a AD. V nej má priamka AF smernicu $|BF| / |AB|$ čiže 1/2, zatiaľ čo priamka AE má smernicu $|BE| / |AB|$ čiže 2. Keďže tieto dve smernice sú navzájom prevrátené čísla, priamky AF a AE sú súmerne združené podľa osi prvého kvadrantu, ktorou však je priamka AC. Inak povedané, bod C leží na osi uhla EAX.

Keďže súčin smerníc každých dvoch navzájom kolmých priamok je -1, priamka EX kolmá na AF má smernicu -2. Keďže priamka EA má opačnú smernicu 2, je os uhla AEX rovnobežná s druhou súradnicovou osou, takže to je nutne priamka EC. Bod C tak leží aj na osi uhla AEX.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné poznatky nasledovne:

- A0 Priamka AE rozpoľuje stranu CD, striedavé uhly DAE a CEA sú zhodné, štvoruholník $ABXE$ je tetivový: 0 bodov.
- A1 Priamka AC je osou uhla EAX: 2 body.
- B Priamka EC je osou uhla AEX: 3 body.
- C1 Zhodnosť uhlov CEA a BAF: 1 bod.
- C2 Zhodnosť uhlov BAF a XEF: 1 bod.
- D1 Bod X je priesečníkom úsečiek AJ a EI z druhého riešenia: 3 body.
- D2 Bod C je stredom kružnice vpísanej trojuholníku s vrcholmi v bodoch A a E a priesečníku úsečiek AJ a EI: 3 body.

Namiesto zhodností uhlov v C1 a C2 môžu byť uvedené zhodnosti či podobnosti pravouhlých trojuholníkov s týmito uhlami. Prípadné neúplné analytické riešenie hodnoťte podľa pokynov A1 a B, ak je vedené týmto smerom.

Celkovo potom dajte maximum zo súčtu bodov za D1 a D2 a zo súčtu bodov z A1 a maxima z bodov z B a maxima zo súčtu bodov za C1 a C2.

---

3 Nech a, b sú kladné celé čísla také, že $a^2 - b^2$ je mocninou 2. Dokážte, že $a^2 + b^2$ je súčtom dvoch mocnín 2. (*Mocninami* 2 rozumieme čísla $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$)

(Zdeno Pezlar, Michal Pecho)

Riešenie 1:

Predpokladajme, že kladné celé čísla a, b spĺňajú rovnosť $a^2 - b^2 = 2^m$ pre nejaké nezáporné celé číslo m. Potom zrejme $a > b$ a $(a+b)(a-b) = 2^m$, teda aj kladné celé čísla $a+b$ a $a-b$ musia byť mocninami 2 s celočíselnými nezápornými exponentmi.

Ak by čísla a a b mali rôznu paritu, obe čísla $a+b$ a $a-b$ by boli nepárne, a museli by preto obe byť rovné 2^0 čiže 1. To však nie je možné, pretože $a + b \geq 2$. Čísla a a b teda musia mať rovnakú paritu, takže obe čísla $a+b$ a $a-b$ sú párne, a teda mocniny 2 s kladnými exponentmi.

Všimnime si, že platí

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 + (a-b)^2\right) = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2,$$

pričom oba posledné sčítance sú podľa predchádzajúceho odseku mocninami 2 s nezápornými celočíselnými exponentmi.

Poznámka:

Je zrejmé, že nájdené mocniny 2 rovné $\frac{1}{2}(a+b)^2$ a $\frac{1}{2}(a-b)^2$ majú nepárne, a teda aj kladné exponenty.

Riešenie 2:

Využijeme opäť rozklad $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, podľa ktorého zo zadania úlohy vyplýva, že platí $a + b = 2^k$ a $a - b = 2^m$ pre niektoré nezáporné celé čísla k a m. Ak sa pozrieme na tieto dve rovnosti ako na sústavu dvoch rovníc s neznámymi a a b, jej vyriešením dostaneme

$$a = \frac{1}{2}(2^k + 2^m) = 2^{k-1} + 2^{m-1},$$

$$b = \frac{1}{2}(2^k - 2^m) = 2^{k-1} - 2^{m-1}.$$

Z toho

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2^{k-1} + 2^{m-1})^2 + (2^{k-1} - 2^{m-1})^2 \\ &= (2^{2(k-1)} + 2 \cdot 2^{k-1} \cdot 2^{m-1} + 2^{2(m-1)}) + (2^{2(k-1)} - 2 \cdot 2^{k-1} \cdot 2^{m-1} + 2^{2(m-1)}) \\ &= 2 \cdot 2^{2k-2} + 2 \cdot 2^{2m-2} = 2^{2k-1} + 2^{2m-1}. \end{aligned}$$

To už bude hľadané vyjadrenie, ak ukážeme, že celočíselné exponenty $2k-1$ a $2m-1$ sú nezáporné, t. j. že obe čísla k a m sú kladné. Možno to urobiť rovnako ako v prvom riešení, ponúkneme však iný postup: Keby platilo $k = 0$ alebo $m = 0$, bola by príslušná z mocnín 2^{2k-1} a 2^{2m-1} rovná $1/2$, teda by sa mu museli rovnať obe mocniny, aby ich súčet $a^2 + b^2$ bol celým číslom. Rovnosť $a^2 + b^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ je však vylúčená, pretože $a^2 + b^2 \geq 1 + 1 = 2$.

Poznámka:

Z druhého riešenia bezprostredne vyplýva, že dvojice (a, b) spĺňajúce zadanie úlohy existujú, že ich je nekonečne veľa a že všetky sú tvaru $(2^u + 2^v, 2^u - 2^v)$, kde u a v sú ľubovoľné celé čísla s vlastnosťou $u > v \geq 0$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A0 Overenie tvrdenia úlohy iba pre konkrétne vyhovujúce dvojice a a b alebo uvedenie rozkladu $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ bez ďalších záverov: 0 bodov.
- A1 Konštatovanie, že čísla $a+b$, $a-b$ sú mocniny 2 s celočíselnými nezápornými exponentmi: 2 body.
- A2 Vylúčenie prípadu, že je niektoré z čísel $a+b$, $a-b$ rovné 2^0: 1 bod.
- A3 Uvedenie rovnosti $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2$: 3 body.
- B1 Konštatovanie, že $a + b = 2^k$ a $a - b = 2^m$ pre celé nezáporné k a m: 2 body.
- B2a Vyjadrenie čísel a a b pomocou čísel k a m: 1 bod.
- B2b Odvodenie rovnosti $a^2 + b^2 = 2^{2k-1} + 2^{2m-1}$: 3 body.
- B3 Vylúčenie prípadu, že niektoré z čísel k a m z B1 je 0: 1 bod.

Celkovo potom dajte maximum zo súčtu bodov z A1 a A2 a zo súčtu bodov z B1, maxima z bodov z B2a a B2b a z bodov z B3.