MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5

1 Na lúke bolo 45 oviec a niekoľko pastierov. Potom ako z lúky odišla polovica pastierov a tretina oviec, mali zvyšní pastieri a ovce spolu 126 nôh. Pritom všetky ovce a všetci pastieri mali obvyklé počty nôh. Koľko pastierov bolo pôvodne na lúke?

(Libuše Hozová)

Nápad:

Koľko oviec bolo na lúke po odchode časti pastierov a oviec?

Riešenie:

Po odchode tretiny oviec ich na lúke zostali dve tretiny z pôvodného počtu, teda 30 oviec ($\frac{2}{3} \cdot 45 = 30$). Tie majú celkom 120 nôh ($30 \cdot 4 = 120$).

Pastieri, ktorí na lúke zostali, mali celkom 6 nôh (lebo $126 - 120 = 6$), teda boli 3 (lebo $6 : 2 = 3$). Pastierov odišla polovica, teda pôvodne ich bolo 6 (lebo $3 \cdot 2 = 6$).

2 Marta hrá hru, v ktorej háda päťciferné číslo tvorené navzájom rôznymi číslicami. Priebeh prvých troch kôl vyzerá takto:

1. kolo	2	6	1	3	8
2. kolo	4	1	9	6	2
3. kolo	8	1	0	2	5

Farba políčka prezrádza niečo o číslici v ňom napísanej:

- Zelené políčko znamená, že číslica sa v hádanom čísle vyskytuje, a to presne na tom mieste.
- Žlté políčko znamená, že číslica sa v hádanom čísle vyskytuje, ale na inom mieste.
- Šedé políčko znamená, že číslica sa v hádanom čísle nevyskytuje.

Vysvetlite, či Marta môže alebo nemôže päťciferné číslo s istotou uhádnuť v nasledujúcom kole.

(Josef Tkadlec)

Nápad:

Ktoré číslice sa môžu v čísle vyskytovať?

Riešenie:

V hádanom čísle sa nevyskytujú číslice zo šedých políčok, teda hľadané číslo neobsahuje číslice 0, 3, 5, 6, 9. Zostáva práve päť číslic – 1, 2, 4, 7, 8 – ktorých poradie sa postupne pokúsime určiť podľa zvyšných políčok. V každom kroku zohľadňujeme všetky predchádzajúce závery:

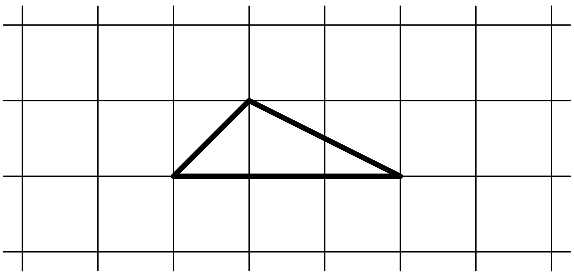
- Číslica 1 môže byť jedine na druhom mieste.
- Číslica 2 nemôže byť ani na druhom, ani na prvom, štvrtom a piatom mieste. Môže byť teda jedine na treťom mieste.
- Číslica 8 nemôže byť ani na druhom a treťom, ani na prvom a piatom mieste. Môže byť teda jedine na štvrtom mieste.
- Číslica 4 nemôže byť ani na druhom, treťom a štvrtom, ani na prvom mieste. Môže byť teda jedine na piatom mieste.
- Číslica 7 nemôže byť na druhom, treťom, štvrtom a piatom mieste. Môže byť teda jedine na prvom mieste.

Ako jediná možnosť vychádza číslo 71284, ktoré vyhovuje všetkým uvedeným požiadavkám. Marta môže číslo s istotou uhádnuť, a to napr. vyššie popísaným spôsobom.

Poznámka:

Súčasťou riešenia je aj popis postupu vedúceho k správnej odpovedi. Riešenie s uhádnutým číslom bez primeraného zdôvodnenia nemožno ohodnotiť ako plnohodnotné.

3 Vo štvorcovej sieti je daný trojuholník, ktorého vrcholy sú uzlovými bodmi siete:



V dostatočne rozšírenej sieti nakreslite štyri rozdielne (navzájom nezhodné) mnohouholníky také, že ich vrcholy sú tiež jej uzlovými bodmi a každý z nich má dvojnásobný obvod, ako má daný trojuholník.

(Erika Novotná)

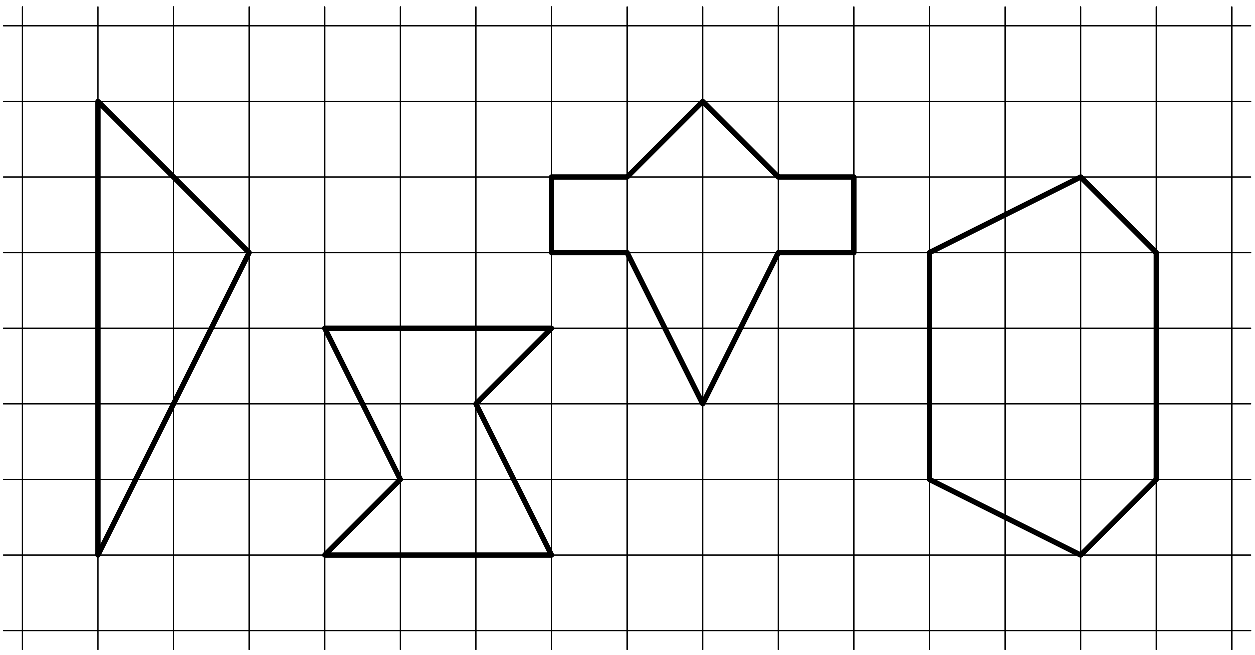
Nápad:

Aké typy úsečiek vidíte na obvode daného trojuholníka?

Riešenie:

Obvod trojuholníka je tvorený tromi hranami siete, jednou uhlopriečkou štvorca 1×1 a jednou uhlopriečkou obdĺžnika 1×2. V nových mnohouholníkoch stačí všetky tieto časti použiť v dvojnásobnom počte.

To sa dá urobiť rozličnými spôsobmi. V nasledujúcom výbere vyhovujúcich mnohouholníkov sú zastúpené rôzne nápady (málo/veľa vrcholov, súmerné/nesúmerné, konvexné/nekonvexné):



---

4 Nikola mala v zošite napísané jedno trojciferné a jedno dvojciferné číslo. Každé z týchto čísel bolo tvorené navzájom rôznymi číslicami. Rozdiel Nikoliných čísel bol 976. Aký bol ich súčet?

(Libuše Hozová)

Nápad:

Ktoré trojciferné čísla prichádzajú do úvahy?

Riešenie 2:

Najväčšie trojciferné číslo s navzájom rôznymi číslicami je 987. Ak by toto bolo jedno z Nikoliných čísel, to druhé by muselo byť 11 (aby rozdiel bol 976). To je dvojciferné číslo, avšak nie je tvorené rôznymi číslicami, teda nemohlo byť Nikoliným číslom.

Najbližšie menšie trojciferné číslo s navzájom rôznymi číslicami je 986. Ak by toto bolo jedno z Nikoliných čísel, to druhé by muselo byť 10. To je dvojmiestne číslo s rôznymi číslicami, teda možné Nikolino číslo.

Žiadna iná dvojica nepripadá do úvahy, lebo 10 je najmenšie dvojciferné číslo. Nikoline čísla boli 986 a 10, teda ich súčet bol 996.

Riešenie 2:

Možno uvažovať aj obrátene, teda od najmenšieho dvojciferného čísla:

Ak by jedno z Nikoliných čísel bolo 10, to druhé by muselo byť 986 (aby rozdiel bol 976). To je trojciferné číslo s navzájom rôznymi číslicami, teda možné Nikolino číslo.

Pre ďalšie dvojciferné čísla s rôznymi číslicami (12, 13, 14, 15, …) by druhé číslo buď obsahovalo dve rovnaké číslice (988, 989, 990, 991, …), alebo by nebolo trojciferné (pre dvojmiestne čísla väčšie ako 23).

Teda Nikoline čísla boli 10 a 986.

Poznámka:

Nie je ťažké odhaliť vyhovujúcu dvojicu čísel. Súčasťou riešenia je aj rozbor ďalších možností, teda zdôvodnenie, že viac takýchto dvojíc nie je. Riešenie bez primeraného rozboru nie je možné hodnotiť najlepším stupňom.

---

5 Tri žaby sa naučili skákať po rebríku. Každá dokáže skákať smerom hore aj smerom dole, ale len o určité počty priečok. Žaby začínajú na zemi a každá by sa rada dostala na svoju obľúbenú priečku:

- Malá žaba vie skákať o 2 alebo o 3 priečky a chce sa dostať na siedmu priečku.
- Stredná žaba vie skákať o 2 alebo o 4 priečky a chce sa dostať na prvú priečku.
- Veľká žaba vie skákať o 6 alebo o 9 priečok a chce sa dostať na tretiu priečku.

Pre jednotlivé žaby rozhodnite, či vedia doskočiť na svoju obľúbenú priečku. Ak áno, popíšte ako. Ak nie, vysvetlite prečo.

(Veronika Bachratá)

Nápad:

Ak sa vám nedarí dostať na danú priečku, skúste inú.

Riešenie:

- Malá žaba môže postupne skočiť hore o 2, o 2 a o 3 priečky, čím sa dostane na siedmu priečku.
- Veľká žaba môže postupne skočiť o 9 priečok hore a o 6 priečok dole, čím sa dostane na tretiu priečku.
- Stredná žaba vie skákať len o párne počty priečok, teda jej dosiahnuteľné priečky sú vždy párne. Na prvú priečku sa táto žaba nedostane.

Poznámka:

Uvedené príklady pri kladných odpovediach sú najjednoduchšie, ale nie jediné možné. Malá žaba môže napr. skákať päťkrát o 2 priečky nahor a raz o 3 priečky nadol, a dostane sa tak na tú istú priečku.

Pokiaľ sú úlohy tohto typu riešiteľné, potom mávajú neobmedzené množstvo riešení. V našom prípade možno navyše považovať iné (prípustné) poradie skokov za iné riešenia.

---

6 Jakub zbiera hracie kocky, všetky rovnakej veľkosti. Včera našiel škatuľku, do ktorej začal kocky ukladať. Prvá vrstva kociek pokryla presne štvorcové dno škatuľky. Podobne vyskladal päť ďalších vrstiev, avšak v polovici nasledujúcej vrstvy mu došli kocky. Dnes dostal Jakub od babičky 18 kociek a s prekvapením zistil, že mu presne chýbali na dokončenie neúplnej vrstvy v škatuľke. Koľko kociek mal Jakub včera?

(Michaela Petrová)

Nápad:

Koľko kociek mal Jakub v každej úplnej vrstve?

Riešenie:

Nových 18 kociek od babičky predstavovalo polovicu všetkých kociek v nedokončenej (a rovnako ako v každej inej) vrstve. Teda v jednej vrstve bolo 36 kociek (lebo $2 \cdot 18 = 36$). Vrstvy sú vskutku štvorcové, a to so 6 radmi po 6 kockách (lebo $6 \cdot 6 = 36$).

Včera mal Jakub vyskladaných šesť plných vrstiev a polovicu siedmej. Celkom tak mal 234 kociek (lebo $6 \cdot 36 + 18 = 234$).

Poznámka:

V uvedenom riešení pre zistený počet kociek vo vrstve overujeme, že mohli tvoriť štvorec. Naopak je možné začať skúšaním možných rozmerov štvorcovej vrstvy tak, aby polovica predstavovala 18 kociek. Rýchlo dospejeme k tej istej možnosti 6 radov po 6 kockách.

Poznámka:

Polovicu vrstvy je možné preskladať do obdĺžnika, ktorého jedna strana je polovičná vzhľadom na stranu druhej. Číslo 18 je možné v tomto duchu rozložiť jedine ako $3 \cdot 6$. Teda jedna vrstva pozostávala z $6 \cdot 6$ čiže 36 kociek.
