KATEGÓRIA Z5

Z5-I-1

Učiteľka Kadrnožková kupovala v pokladni zoologickej záhrady vstupenky pre svojich žiakov a pre seba. Vstupenka pre dospelého bola drahšia ako pre školáka, ale nie viac ako dvakrát. Učiteľka Kadrnožková zaplatila 994 Sk. Učiteľ Hniezdo mal so sebou o troch žiakov viac ako učiteľka Kadrnožková, a za svojich žiakov a za seba zaplatil 1120 Sk.
a) Koľko žiakov mal so sebou učiteľ Hniezdo?
b) Koľko stála vstupenka pre dospelého?

L. Šimůnek

Možné riešenie: Zo zadania bezprostredne vyplýva, že vstupné pre troch žiakov stálo 1120 – 994 =126 (Sk), takže pre jedného žiaka 126 : 3 = 42 (Sk). Za 1120 Sk by učiteľ hniezdo nakúpil vstupenky pre najviac 26 žiakov (a 28 Sk by mu potom ostalo), pretože 1120 : 42 = 26 (zvyšok 28). Keď zvyšok pridáme k cene žiackej vstupenky, získame cenu vstupenky pre dospelého (táto vstupenka má byť drahšia než žiacka, avšak nie viacej ako dvakrát). Učiteľova vstupenka teda stála 42 + 28 =70 (Sk) a žiakov bolo 26 – 1 = 25.

(pre kontrolu $25\cdot 42+70=1120$ a $22\cdot 42+70=994$, takže všetko je v úplnom poriadku.)

Z5-I-2

Fero Nudilsa sa zabával tým, že písal za sebou idúce prirodzené čísla. Začal jednotkou: 1234567891011... Po čase ho to prestalo baviť, dokončil práve rozpísané číslo a kriticky sa pozrel na svoj výtvor. Zistil, že v postupnosti číslic, ktoré napísal, sa vyskytuje päť jednotiek za sebou.

a) Najmenej koľko za sebou idúcich prirodzených čísel napísal Fero?
b) Najmenej koľko číslic napísal Fero?

S. Bednářová

Možné riešenie: 1. Aby bolo v rade päť jednotiek za sebou, musia byť napísané čísla väčšie než 110 a rad vyzerá takto:

123456789101112 . . . 110111112 . . .

Fero napísal najmenej 112 za sebou idúcich prirodzených čísel.

2. Pre počítanie číslic si uvedomíme, že v napísanom rade je 9 jednociferných (1-9), 90 dvojciferných (10-99) a aspoň 13 trojciferných (100-112) čísel. Dokopy Fero napísal najmenej $9-90\cdot 2-13\cdot 3=\underline{\underline{228}}$ číslic.

Z5-I-3

Najvyššia známa sopka na zemeguli je Mauna Kea na Havajských ostrovoch. Jej výška od úpätia po vrchol je dokonca o 358 metrov väčšia, ako je nadmorská výška najvyššej hory sveta, Mont Everestu. Nedvíha sa však z pevniny, ale z dna Tichého oceánu, z 5000 metrovej hĺbky. Keby morská hladina v tejto oblasti klesla o 397 metrov, bola by ponorená časť Mauna Key presne rovnako vysoká, ako časť, ktorá by vyčnievala nad hladinu.

c) Akú nadmorskú výšku má vrchol sopky?
d) Koľko meria Mauna Kea od úpätia po vrchol?
e) Akú nadmorskú výšku má Mont Everest?

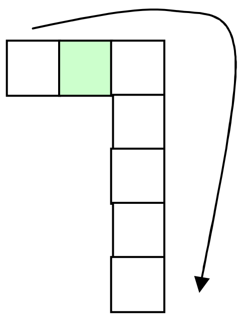
(Údaje o nadmorských výškach uvádzané v rôznych literatúrach sa môžu líšiť. Je to spôsobené jednak nepresnosťami niektorých meraní, jednak pohybmi zemskej kôry – tieto výšky sa skutočne menia! Pri riešení úlohy preto vychádzaj len z údajov uvedených v úlohe.)

S. Bednářová

Možné riešenie:

a) Keby morská hladina klesla o 397m, merala by ponorená časť sopky 5000 – 397 = 4603 (m). Sopka Mauna Kea teda meria od úpätia po vrchol 4603 + 4603 = 9206 (m).
b) Z toho vyplýva, že vrchol sopky je v nadmorskej výške 9206 – 5000 = 4206 (m).
c) A Mont Everest má nadmorskú výšku 9206 – 358 = 8848 (m)

Z5-I-4



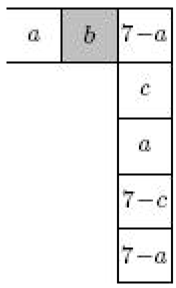
Klasická hracia kocka sa kotúľala naznačeným smerom po pláne na obrázku. Pri jej pohybe na každom políčku ostali otlačené bodky zo steny, ktorou sa plánu dotýkala. Súčet všetkých bodiek otlačených na pláne bol 23. Koľko bodiek bolo otlačených na zafarbenom políčku?
(Klasická hracia kocka má na stenách bodky 1, 2, ..., 6 umiestnené tak, že súčet počtu bodiek na protiľahlých stenách je 7. Plán pozostáva zo štvorcov, ktoré sú rovnako veľké ako steny kocky.)

M. Dillingerová

Možné riešenie: Dvojica čísel ležiacich na protiľahlých stenách kocky sú (1,6) (2,5) a (3,4). Pri riešení úlohy je možné diskutovať všetky možnosti vzhľadom k umiestneniu kocky na prvom políčku plánu, čo je zbytočne prácne. Jednoduchšie je uvedomiť si, na ktorých políčkach sa otláčajú protiľahlé steny. Označme *a* počet bodiek na stene, ktorou sa kocka dotkne prvého políčka plánu, a *b* počet bodiek na stene, ktorou sa kocka dotkne nasledujúceho políčka plánu. Potom zistíme, že na prvých troch políčkach sú otlačené nasledujúce počty bodiek

a	b	$7-a$

Po preklopení sa na ďalšie políčko plánu nemôžeme dostať žiaden z počtov *a, 7 – a, b* ani *7 – b,* Označme teda ďalší otlačený počet bodiek *c*. Postupne na pláne získavame počty zaznamenané na obrázku.

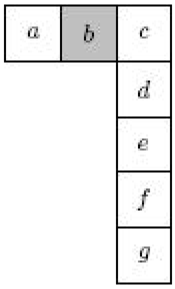


Môžeme si všimnúť, že dvojice a, $7 - a$ sa na pláne vyskytujú dvakrát a dvojice c, $7 - c$ jedenkrát. Súčet týchto dvojíc je vždy 7 a súčet všetkých otlačených bodiek je:

$$a + b + (7 - a) + c + a + (7 - c) + (7 - a) = 3 * 7 + b = 21 + b.$$

V skutočnosti bolo otlačených 23 bodiek, teda $21 + b = 23$ a $b = 2$.

Iné riešenie: Označme počty otlačených bodiek na jednotlivých políčkach a až g ako na obrázku



Na políčkach e a a je otlačená rovnaká stena a rovnako na políčkach c a g je otlačená rovnaká stena. Pretože súčet bodiek na protiľahlých stenách kocky je vždy 7, platí pri prevracaní kocky, podľa návodu, že $a + c = 7$, $d + f = 7$ a $e + g = 7$ (Podobne tiež $c + e = 7$, ale tento postreh potrebovať nebudeme). Podľa zadania bol súčet všetkých otlačených bodiek na políčkach $a + b + c + d + e + f + g = 23$, takže

$$\begin{gathered}(a + c) + (d + f) + (e + g) + b = 23,\\ 7 + 7 + 7 + b = 23,\\ 21 + b = 23,\\ b = 2.\end{gathered}$$

Na vybranom políčku sú otlačené 2 bodky.

Z5-I-5

Digitálne hodiny ukazujú hodiny a minúty, napríklad 14:37. Akú dobu (v minútach) svieti za 24 hodín na týchto hodinách aspoň jedna päťka?

M. Volfová

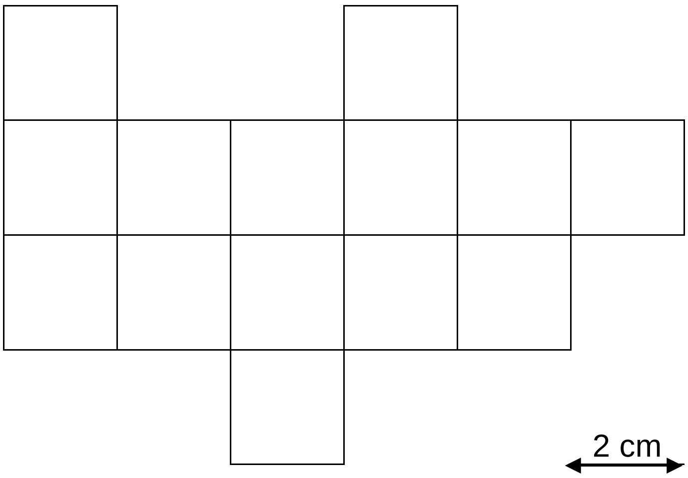
Možné riešenie: Na 1. mieste päťka svietiť nemôže. Budeme najprv uvažovať interval prvých 12 hodín:

- Na 2. mieste päťka svieti 60 minút (od 5:00 do 5:59);
  u ďalších miest preto uvažujeme len zostávajúcich 11 hodín
- Na 3. mieste svieti päťka každú hodinu 10 minút (od xx:50 do xx:59);
  celkom $11 * 10 = 110$ minút.
- Na 4. mieste svieti päťka každú hodinu šesťkrát po jednej minúte (05, 15, 25, 35, 45, 55), započítame však iba 5 minút, pretože minúta xx:55 je už započítaná v predchádzajúcom odseku;
  celkom $11 * 5 * 1 = 55$ minút.

Aspoň jedna päťka svieti v intervale 12 hodín 60 + 110 + 55 =225 minút, za celý deň teda 2 * 225 = 450 minút, tj. 7 hodín 30 minút (na druhom mieste je aj v dobre od 15:00 do 15:59)

Iné riešenie: V dobe od 5:00 do 5:59 svieti 60 minút päťka na druhom mieste (takisto v dobe od 15:00 do 15:59). Pre každú z ostatných 22 hodín môže vypísať minúty, v ktorých bude svietiť aspoň jedna päťka: 05, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, tj. Celkom 15 minút. Spolu za celý deň to je
2 * 60 + 22 * 15 = 120 + 330 = 450 minút.

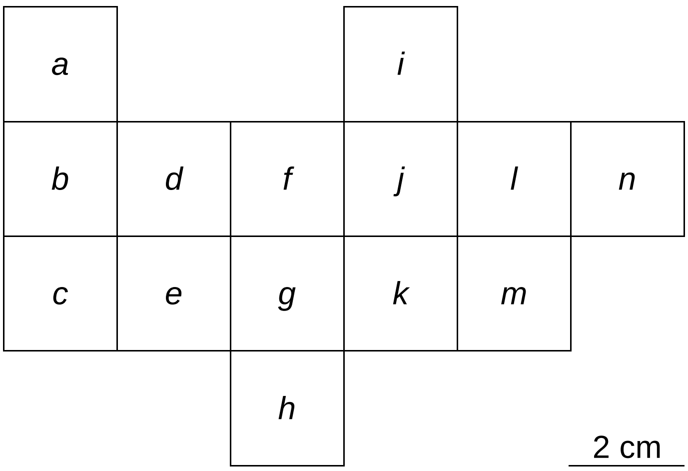
Z5-I-6
Danko si zo štvorčekovej siete vystrihol útvar ako na obrázku:



Odstrihni dva štvorčeky siete tak, aby sa výsledný útvar nerozpadol a aby mal čo najväčší obvod. Nájdi všetky riešenia.

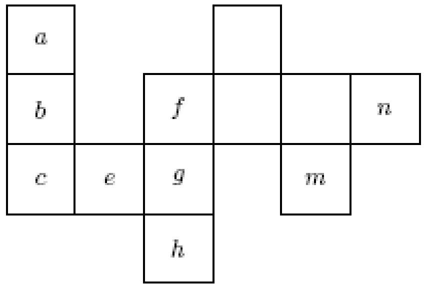
M. Dillingerová

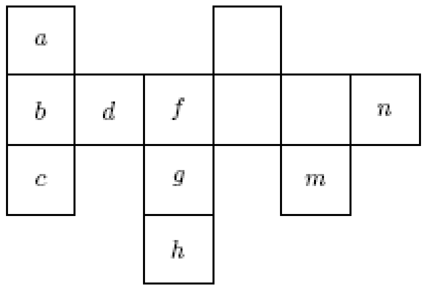
Možné riešenie: Označme jednotlivé štvorčeky písmenami *a* až *n*:



Aby bol obvod nového útvaru najväčší možný, sústredíme sa iba na štvorčeky, ktoré v pôvodnom útvare susedia s čo najviac štvorčekmi. Súčasne musí po odstrihnutí každého štvorčeku zostať výsledný útvar pohromade. Za týchto požiadaviek môžu byť odstrihnuté iba štvorčeky *d, e, f, k.*

Dvojice štvorčekov (*d,e*), (*e,f*) a (*f,k*) odstrihnúť nemôžeme, pretože by sa útvar rozpadol. Odstrihnutím dvojice (*d,f*) sa zväčší obvod útvaru o 2 * 2 = 4 (cm) a odstrihnutím (*d,k*) alebo (*e,k*) sa zväčší o 4 * 2 = 8 (cm). Pretože sme vyčerpali všetky možnosti, posledné dve varianty predstavujú riešenie úlohy, viď obrázky.


a
b
f
n
c
e
g
m
h


a
b
d
f
n
c
g
m
h