MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9

1 Aritmetická postupnosť je taká postupnosť čísel, v ktorej je rozdiel každého čísla a čísla jemu predchádzajúceho stále rovnaký; tomuto rozdielu sa hovorí *diferencia*. (Napríklad $(2, 8, 14, 20, 26, 32)$ je aritmetická postupnosť s diferenciou 6.)

Bolek a Lolek mali každý svoju aritmetickú postupnosť. Aj Bolkova aj Lolkova postupnosť sa začínala číslom 2023 a končila sa číslom 3023. Tieto dve postupnosti mali 26 spoločných čísel. Pomer Bolkovej a Lolkovej diferencie bol $5 : 2$. Určte rozdiel Bolkovej a Lolkovej diferencie.

(Erika Novotná)

Nápad:

Bolkovu a Lolkovu diferenciu je možné vyjadriť pomocou jednej premennej.

Riešenie:

Pomer Bolkovej a Lolkovej diferencie bol $5 : 2$. Teda Bolkova diferencia bola $5k$ a Lolkova $2k$, kde k je zatiaľ neznáme číslo, ktoré skoro určíme z ostatných informácií. Rozdiel Bolkovej a Lolkovej diferencie potom vyjadríme ako $5k - 2k$ čiže $3k$.

Bolkova postupnosť sa zabola

$$(2023, 2023 + 5k, 2023 + 10k, \dots)$$

a Lolkova

$$(2023, 2023 + 2k, 2023 + 4k, 2023 + 6k, 2023 + 8k, 2023 + 10k, \dots)$$

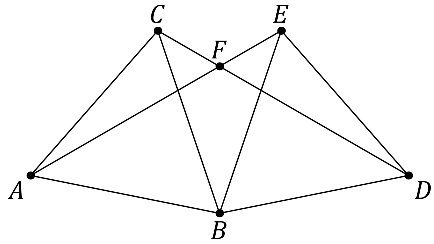
spoločné čísla oboch postupností teda tvorili postupnosť

$$(2023, 2023 + 10k, 2023 + 20k, 2023 + 30k, \dots)$$

Spoločných čísel bolo 26 a posledné bolo 3023. Pritom 26. číslo v postupnosti spoločných čísel je $2023 + 250k$, teda $k = 4$ (lebo $2023 + 250 \cdot 4 = 3023$).

Rozdiel Bolkovej a Lolkovej diferencie bol teda $3 \cdot 4$ čiže 12.

2 Sú dané dva zhodné rovnostranné trojuholníky ABC a BDE tak, že veľkosť uhla ABD je väčšia ako $120°$ a menšia ako $180°$ a body C, E ležia v rovnakej polrovine vymedzenej priamkou AD. Priesečník CD a AE je označený F. Určte veľkosť uhla AFD.



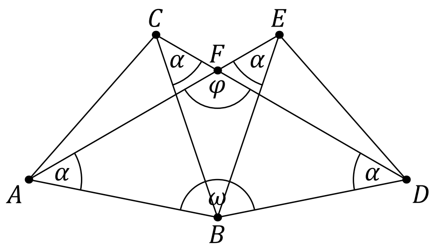
(Iveta Jančigová)

Nápad:

Súčty vnútorných uhlov v trojuholníkoch či mnohouholníkoch poznáte.

Riešenie 1:

Vnútorný uhol pri vrchole A, resp. D v štvoruholníku $AFDB$ je tiež vnútorným uhlom trojuholníka ABE, resp. DBC. Trojuholníky ABE a DBC sú podľa predpokladov rovnoramenné a navzájom zhodné. Teda vnútorné uhly pri vrcholoch A, E, D, C v týchto trojuholníkoch sú navzájom zhodné. Veľkosť týchto uhlov závisí od uhla ABD, ktorý nie je presne vymedzený. Označme diskutované uhly podľa obrázku:



Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku ABE, resp. DBC dáva vzťah

$$2\alpha + \omega - 60° = 180°.$$

Súčet vnútorných uhlov v štvoruholníku $AFDB$ dáva vzťah s hľadaným uhlom φ:

$$2\alpha + \omega + \varphi = 360°.$$

Z prvého vzťahu plynie $2\alpha + \omega = 240°$, čo spoločne s druhým vzťahom dáva $\varphi = 120°$.

Veľkosť uhla AFD je teda 120°.

Riešenie 2:

Vnútorný uhol v rovnostrannom trojuholníku má veľkosť 60°. Pri otočení okolo bodu B o 60° v smere hodinových ručičiek sa bod A zobrazí na C a bod E sa zobrazí na D. Teda priamka AE sa zobrazí na priamku CD.

Uhol AFC, resp. EFD má preto veľkosť 60°. Hľadaný uhol AFD dopĺňa tento uhol do priameho uhla, teda má veľkosť 120°.

Poznámka:

Uhol φ naozaj nezávisí od veľkosti uhla ω. Obmedzenia v zadaní nie sú podstatné a slúžia len na ľahšie uchopenie úlohy. V hraničných prípadoch dostávame špeciálne a spravidla jednoduchšie prípady: Ak $\omega = 120°$, tak body C, E a F splývajú a φ je súčtom dvoch vnútorných uhlov rovnostranných trojuholníkov. Ak $\omega = 180°$, tak dostávame zadanie ako v úlohe Z7-I-2.

---

3 Traja kúzelníci kúzlia s číslami, každý však vie len jedno kúzlo:

- Prvý kúzelník vie od ľubovoľného čísla odčítať číslo jedna.
- Druhý kúzelník vie ľubovoľné číslo vydeliť číslom dva.
- Tretí kúzelník vie ľubovoľné číslo vynásobiť číslom tri.

Kúzelníci sa pri čarovaní môžu ľubovoľne striedať, každý však môže svoje kúzlo počas jedného vystúpenia použiť najviac päťkrát a žiadny medzivýsledok nesmie byť väčší ako 10. Pri jednom vystúpení mali z pätice čísel $(3, 8, 9, 2, 4)$ vykúzliť päticu trojok, pri inom vystúpení mali z tej istej pätice čísel vykúzliť päticu pätiek. Ako si mohli s problémom poradiť? Nájdite možné riešenie alebo vysvetlite, prečo to možné nie je.

(Erika Novotná)

Nápad:

Ak vám nejde kúzlenie priamo, skúste to nepriamo.

Riešenie:

Päticu trojok možno vykúzliť, kúzelníci mohli (v ľubovoľnom poradí) postupovať podľa nasledujúcej schémy:

- 3
- $8 \xrightarrow{:2} 4 \xrightarrow{-1} 3$
- $9 \xrightarrow{-1} 8 \xrightarrow{:2} 4 \xrightarrow{-1} 3$
- $2 \xrightarrow{:2} 1 \xrightarrow{\cdot 3} 3$
- $4 \xrightarrow{-1} 3$

Žiadne z kúziel nebolo použité viac ako štyrikrát a žiadny medzivýsledok nebol väčší ako 8.

Päticu päťok vykúzliť síce možno, ale nie s dodatočnými obmedzeniami na počet jednotlivých kúziel a veľkosti medzivýsledkov:

Najprv si uvedomme, že všetky medzivýsledky musia byť celočíselné, pretože pôvodné i koncové číslo je celé: Z celého čísla možno neceločíselný medzivýsledok dostať použitím druhého kúzla (v menovateli bude mocnina 2), s danými typmi kúziel by však tiež všetky nasledujúce čísla neboli celé. K celému číslu sa dá z neceločíselného medzivýsledku dostať použitím tretieho kúzla (v menovateli bola mocnina 3), s danými typmi kúziel by však tiež všetky predchádzajúce čísla nemohli byť celé.

Ku koncovému číslu 5 je možné dospieť dvojakým spôsobom: buď $10 \xrightarrow{:2} 5$, alebo $6 \xrightarrow{-1} 5$. Medzivýsledok 10 však nemôže vzniknúť z čísla, ktoré by nebolo väčšie ako 10. Teda pätica pätiek môže vzniknúť jedine jedným použitím prvého kúzla na pätici šestiek:

- $\cdots\ 6 \xrightarrow{-1} 5$
- $\cdots\ 6 \xrightarrow{-1} 5$
- $\cdots\ 6 \xrightarrow{-1} 5$
- $\cdots\ 6 \xrightarrow{-1} 5$
- $\cdots\ 6 \xrightarrow{-1} 5$

Tým je maximálny počet použití prvého kúzla vyčerpaný a otázka znie, či je možné vykúzliť päticu šestiek len pomocou druhého a tretieho kúzla, z ktorých žiadne nie je použité viac ako päťkrát a žiadny medzivýsledok nie je väčší ako 10.

K číslu 6 je možné dospieť jediným spôsobom, a to $2 \xrightarrow{\cdot 3} 6$. Teda pätica šestiek môže vzniknúť jedine jedným použitím tretieho kúzla na pätici dvojok:

- $\cdots\ 2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{-1} 5$
- $\cdots\ 2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{-1} 5$
- $\cdots\ 2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{-1} 5$
- $\cdots\ 2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{-1} 5$
- $\cdots\ 2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{-1} 5$

Tým je maximálny počet použití tretieho kúzla vyčerpaný a otázka znie, či je možné vykúzliť päticu dvojok len pomocou druhého kúzla, ktoré nie je použité viac ako päťkrát a žiadny medzivýsledok nie je väčší ako 10. To však pre danú päticu čísel $(3, 8, 9, 2, 4)$ nie je možné (pre problém s 3 a 9).

S danými obmedzeniami päticu pätiek vykúzliť nemožno, kúzelníci by sa do tohto vystúpenia radšej púšťať nemali.

---

4 Nájdite najmenšie kladné celé čísla a a b, pre ktoré platí

$$7a^3 = 11b^5.$$

(Alžbeta Bohiniková)

Nápad:

Oplatí sa zamerať na prvočísla.

Riešenie:

Z uvedenej rovnosti vyplýva, že medzi prvočíselnými činiteľmi a a b musí byť 7 a 11. Pretože hľadáme najmenšie vyhovujúce čísla a a b, môžeme predpokladať, že iné prvočinitele tieto čísla nemajú. Teda

$$a = 7^k \cdot 11^m,$$
$$b = 7^l \cdot 11^n.$$

kde k, l, m, n sú zatiaľ neznáme, ale čo najmenšie nezáporné celé čísla. Po dosadení do pôvodnej rovnice dostávame

$$7(7^k \cdot 11^m)^3 = 11(7^l \cdot 11^n)^5,$$
$$7 \cdot (7^{3k} \cdot 11^{3m}) = 11 \cdot (7^{5l} \cdot 11^{5n}),$$
$$7^{3k+1} \cdot 11^{3m} = 7^{5l} \cdot 11^{5n+1}.$$

Porovnaním zodpovedajúcich činiteľov dostávame sústavu rovníc

$$3k + 1 = 5l,$$
$$3m = 5n + 1.$$

Čísla k, l, m, n majú byť čo najmenšie, takže $k = 3$, $l = 2$, $m = 2$, $n = 1$. Z toho už dostávame

$$a = 7^3 \cdot 11^2 = 41503,$$

$$b = 7^2 \cdot 11 = 539.$$

Dosadením do pôvodnej rovnice sa môžeme presvedčiť, že je to naozaj jej riešenie.

Poznámka:

Pre zaujímavosť dodávame, že všetky celočíselné riešenia zadanej rovnice sú

$$a = 41503 \cdot c^5,$$
$$b = 539 \cdot c^3,$$

kde c je ľubovoľné celé číslo.

---

5 Na snovom trhovisku ponúkla Sfinga cestovateľovi za štyri sny sedem ilúzií, dva šlofíky a jednu nočnú moru. Inému cestovateľovi ponúkla za sedem snov štyri ilúzie, štyri šlofíky a dve nočné mory. Sfinga je pri svojich ponukách spravodlivá a vymeriava vždy rovnako. Koľko ilúzií stojí jeden sen?

(Karel Pazourek)

Nápad:

Vyjadrite vzťahy zo zadania pomocou neznámych, zasnite sa a hľadajte vzťahy ďalšie.

Riešenie:

Označme cenu sna, ilúzie, šlofíka a nočné mory postupne ako s, i, f a m. Potom podľa zadania platí

$$4s = 7i + 2f + m,$$
$$7s = 4i + 4f + 2m.$$

Šlofíkov a nočných môr je v druhej rovnici dvakrát toľko, koľko v prvej rovnici. Vyjadrením týchto komodít z prvej rovnice a dosadením do druhej dostaneme vzťah medzi snami a ilúziami:

$$4s - 7i = 2f + m,$$
$$7s = 4i + 2(2f + m),$$
$$7s = 4i + 8s - 14i,$$
$$s = 10i.$$

Jeden sen teda stál 10 ilúzií.

Aby však bolo riešenie úplné, treba ešte ukázať, že informácie v zadaní nemusia byť iluzórne. Na to stačí, aby sen stál 10 ilúzií, šlofík tiež 1 ilúziu a nočná mora 31 ilúzií.

Poznámka:

Zo zadania nie je možné určiť zvyšné neznáme, iba odvodzovať ich ďalšie vzťahy, presnejšie povedané inak vyjadrovať zadané vzťahy.

Pre dané rovnice, je možné akúkoľvek ich manipuláciou (použitou súčasne na obe ich strany) odvodiť opäť platnú rovnicu. Pri riešení lineárnych rovníc môžeme eliminovať neznáme vhodnými lineárnymi kombináciami daných rovníc. Náš prípad je špeciálny v tom, že je možné eliminovať dve zo štyroch neznámych naraz: rozdiel druhej rovnice od dvojnásobku prvej dáva

$$8s - 7s = 14i + 4f + 2m - 4i - 4f - 2m,$$
$$s = 10i.$$

To je len inak uchopený ten istý postreh ako v uvedenom riešení.

Poznámka:

Sústava rovníc

$$4s = 7i + 2f + m,$$
$$7s = 4i + 4f + 2m$$

má nekonečne mnoho riešení (i, s, f, m), ktoré je možné vyjadriť napr. v tvare

$$s = 10i,$$
$$m = 33i - 2f,$$

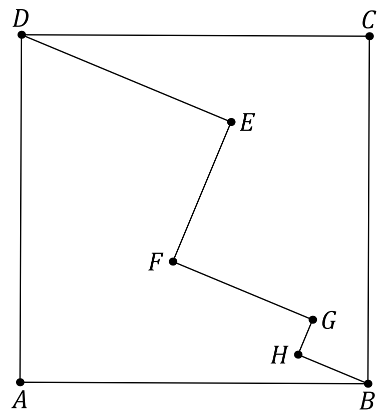
kde i a f môžu byť ľubovoľné čísla. Všetky riešenia sú lineárnymi kombináciami štvoríc $(0, 0, 1, -2)$ a $(1, 10, 0, 33)$.

Poznámka:

Aj pre hádaním a pokusmi odhalené riešenie bude určite platiť $s = 10i$. Zovšeobecnenie typu „Prípad $i = 1$, $s = 10$, $f = 0$, $m = 33$ je riešením, teda $s = 10i$.“ však nemožno bez dodatočného vysvetlenia považovať za vyhovujúce riešenie úlohy.

---

6 Vrcholy štvorca $ABCD$ spája lomená čiara $DEFGHB$. Uhly DEF, EFG, FGH, GHB sú pravé a úsečky DE, EF, FG, GH, HB merajú postupne 6 cm, 4 cm, 4 cm, 1 cm, 2 cm. Určte obsah štvorca $ABCD$.



(Monika Dillingerová)

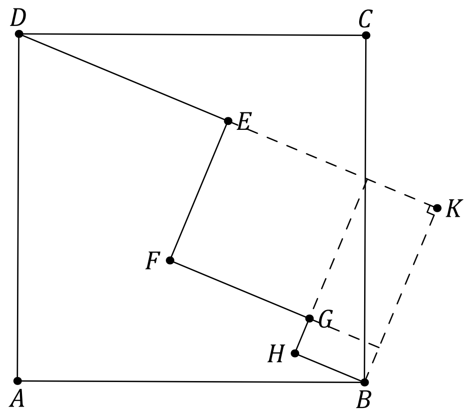
Nápad:

Dala by sa z polámanej uhlopriečky určiť tá skutočná?

Riešenie:

Zo zadania je možné určiť uhlopriečku štvorca, odkiaľ už ľahko vyjadríme jeho obsah.

Uhlopriečku DB interpretujeme ako preponu v pravouhlom trojuholníku DKB, ktorého odvesny sú rovnobežné s časťami danej lomenej čiary (doplnené pomocné štvoruholníky sú obdĺžniky):



Potom platí

$$|DK| = |DE| + |FG| + |HB| = 6\text{ cm} + 4\text{ cm} + 2\text{ cm} = 12\text{ cm},$$

$$|KB| = |EF| + |GH| = 4\text{ cm} + 1\text{ cm} = 5\text{ cm}.$$

Podľa Pytagorovej vety platí

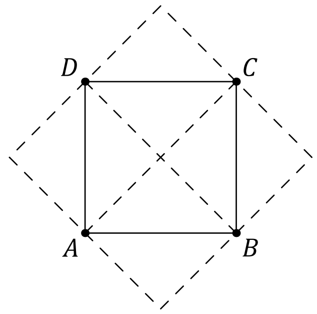
$$|DB|^2 = |DK|^2 + |KB|^2 = (12\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2 = 169\text{ cm}^2.$$

Obsah štvorca $ABCD$ je rovný polovici obsahu štvorca, ktorého strana je uhlopriečkou štvorca $ABCD$, t. j.

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}|DB|^2 = 84{,}5\text{ cm}^2.$$

Poznámka:

Posledný vzťah je možné považovať za dobre známy, takže ho nie je nutné odvodzovať. Názorne je možné tento vzťah znázorniť takto:



Z Pytagorovej vety v trojuholníku BAD vieme, že $|DB|^2 = 2\,|AB|^2$, teda $|AB|^2 = \frac{1}{2}\,|DB|^2$, čo je práve obsah štvorca $ABCD$.