MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9

1 Nájdite všetky štvorciferné čísla, ktoré majú presne päť štvorciferných a presne deväť jednociferných deliteľov.

(Svetlana Bednářová)

Riešenie:

Hľadané čísla majú mať deliteľa 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, teda musia byť deliteľné ich najmenším spoločným násobkom: $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ čiže 2520. Ak budeme odteraz skúšať násobky čísla 2520, budú mať tiež tých istých jednociferných deliteľov. Odlišný však bude počet ich štvorciferných deliteľov.

Ako prvé vyskúšame priamo číslo 2520. Číslo 2520 je štvorciferné, ale má len dvoch štvorciferných deliteľov, a to 2520 a 1260, a najbližším menším deliteľom je 840.

Ďalším násobkom čísla 2520 je 5040. Toto číslo je štvorciferné a má práve päť štvorciferných deliteľov, a to 5040 (ono samo), 2520 (polovica), 1680 (tretina), 1260 (štvrtina), 1008 (pätina).

Ďalším násobkom čísla 2520 je 7560. Toto číslo je štvorciferné, ale má viac ako päť štvorciferných deliteľov: 7560 (ono samo), 3780 (polovica), 2520 (tretina), 1890 (štvrtina), 1512 (pätina), 1260 (šestina), 1080 (sedmina).

Ďalšie násobky položky 2520 už nie sú štvorciferné.

Jediným riešením úlohy je číslo 5040.

Pokyny:

2 body za najmenší spoločný násobok jednociferných deliteľov; 2 body za postupný rozbor možností; 2 body za záver a kvalitu komentára.

---

2 Trojuholník ABC má stranu AC dlhú 24 cm a výšku z vrcholu B dlhú 25 cm. Strana AB je rozdelená na päť zhodných častí, deliace body sú postupne od A k B označené K, L, M, N. Každým z týchto bodov prechádza rovnobežka so stranou AC. Priesečníky rovnobežiek so stranou BC sú postupne od B k C označené O, P, Q, R.

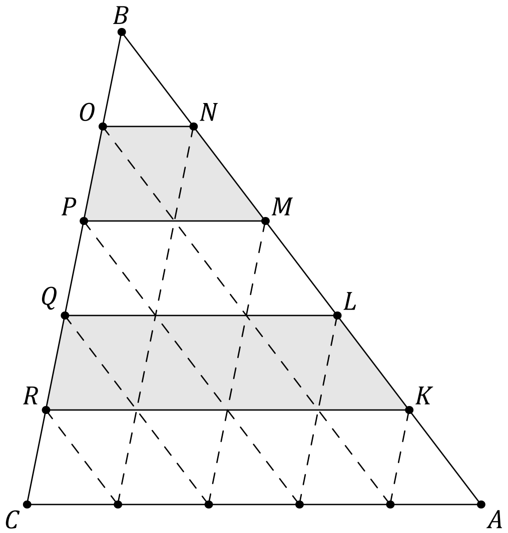
Vypočítajte súčet obsahov lichobežníkov $KLQR$ a $MNOP$.

(Iveta Jančigová)

Riešenie 1:

Obsah celého trojuholníka ABC je $\frac{1}{2} \cdot 24\text{ cm} \cdot 25\text{ cm}$ čiže 300 cm^2.

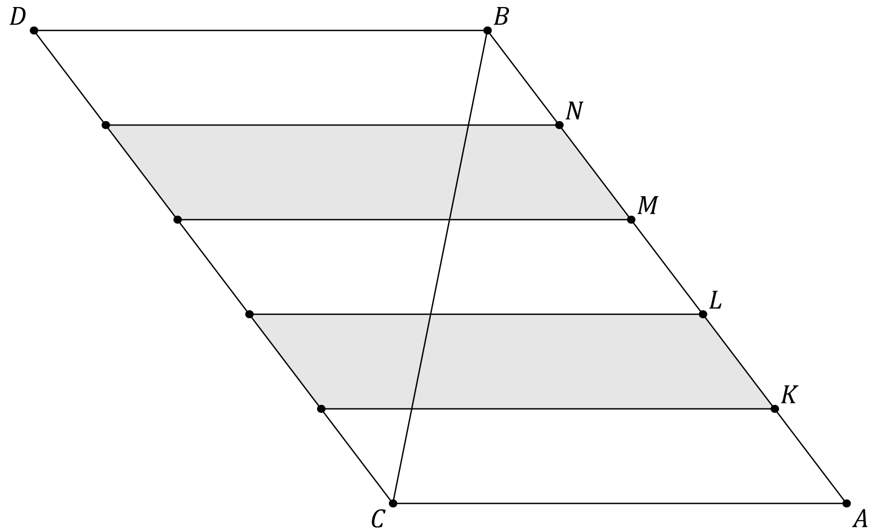
Rovnobežky so stranou AB prechádzajúce bodmi O, P, Q, R a rovnobežky so stranou BC prechádzajúce bodmi K, L, M, N rozdeľujú trojuholník ABC na menšie navzájom zhodné trojuholníky. Vzájomná zhodnosť trojuholníkov plynie z konštrukcie a základných viet o zhodnostiach trojuholníkov (*sus*, *sss*, *usu*). Najmenšími dielikmi v tomto delení sú trojuholníky zhodné s trojuholníkom NBO a tých je dokopy 25.



Obsah trojuholníka NBO je $\frac{1}{25} \cdot 300\text{ cm}^2$ čiže 12 cm^2. Lichobežník $KLQR$, resp. $MNOP$ pozostáva zo 7, resp. z 3 takých trojuholníkov. Súčet obsahov týchto lichobežníkov je teda $(7 + 3) \cdot 12\text{ cm}^2$ čiže 120 cm^2.

Riešenie 2:

Trojuholník ABC doplníme do rovnobežníka $ABDC$. Štvorica rovnobežiek po predĺžení delí rovnobežník na päť zhodných rovnobežníkov:



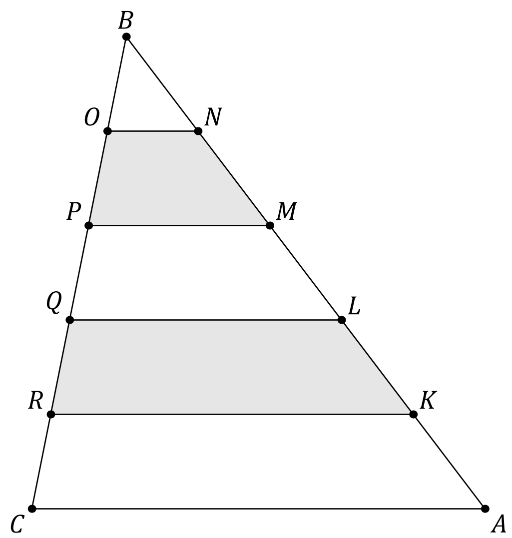
Obsah celého rovnobežníka $ABDC$ je $24\text{ cm} \cdot 25\text{ cm}$ čiže 600 cm^2.

Súčet obsahov dvoch rovnobežníkov vyfarbených sivou je $\frac{2}{5} \cdot 600\text{cm}^2$ čiže 240 cm^2.

Trojuholníky ABC a DCB sú zhodné, a to vrátane vyfarbených častí. Teda súčet obsahov lichobežníkov $KLQR$ a $MNOP$ je rovný polovici súčtu obsahov sivých rovnobežníkov: $\frac{1}{2} \cdot 240\text{ cm}^2$ čiže 120 cm^2.

Riešenie 3:

Trojuholníky ABC, KBR, LBQ, MBP a NBO sú navzájom podobné, pretože majú spoločný uhol vo vrchole B a k nemu protiľahlé strany sú navzájom rovnobežné. Koeficienty podobnosti medzi prvými a zvyšnými štyrmi trojuholníkmi sú postupne $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$ a $\frac{1}{5}$.



Obsah celého trojuholníka ABC je $\frac{1}{2} \cdot 24\text{ cm} \cdot 25\text{ cm}$ čiže 300 cm^2.

Obsahy trojuholníkov NBO, MBP, LBQ, KBR sú postupne

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} \cdot 24\text{ cm}\right)\left(\frac{1}{5} \cdot 25\text{ cm}\right) \quad \text{čiže} \quad 12\text{ cm}^2,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} \cdot 24\text{ cm}\right)\left(\frac{2}{5} \cdot 25\text{ cm}\right) \quad \text{čiže} \quad 148,\text{cm}^2,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} \cdot 24\text{ cm}\right)\left(\frac{3}{5} \cdot 25\text{ cm}\right) \quad \text{čiže} \quad 108\text{ cm}^2,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} \cdot 24\text{ cm}\right)\left(\frac{4}{5} \cdot 25\text{ cm}\right) \quad \text{čiže} \quad 192\text{ cm}^2.$$

Obsah lichobežníka $KLQR$ je rozdielom obsahov trojuholníkov KBR a LBQ, obsah lichobežníka $MNOP$ je rozdielom obsahov trojuholníkov MBP a NBO. Súčet obsahov týchto dvoch lichobežníkov je teda

$$(192\,\mathrm{cm}^2 - 108\,\mathrm{cm}^2) + (48\,\mathrm{cm}^2 - 12\,\mathrm{cm}^2) \quad \text{čiže} \quad 120\,\mathrm{cm}^2.$$

Poznámka:

Vo všetkých uvedených riešeniach možno namiesto postupného vyčísľovania obsahov pracovať s výrazmi vyjadrujúcimi závislosť na obsahu trojuholníka ABC a hodnoty zo zadania dosadzovať až nakoniec. Ak obsah trojuholníka ABC označíme S, tak výpočty v prvom, druhom a treťom riešení zodpovedajú postupne

$$\frac{7+3}{25}S = \frac{2}{5}S,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2S = \frac{2}{5}S,$$

$$\left(\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right)S = \frac{16-9+4-1}{25}S = \frac{2}{5}S.$$

Pokyny:

2 body za počiatočné úvahy (delenie, doplnenie, resp. zhodnosti/podobnosti); 2 body za pomocné výpočty a výsledok; 2 body za kvalitu komentára.

---

3 Pomocou premennej n boli zapísané nasledujúce štyri výrazy:

$$2023n, \quad n^2 + n + 23, \quad 3n^3, \quad 10n^2 + 2023.$$

Výraz nazveme *nepárnotvorný*, ak pre každé prirodzené číslo n platí, že hodnota výrazu je nepárna. Rozhodnite, ktoré z uvedených štyroch výrazov sú nepárnotvorné, a zdôvodnite prečo.

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Pri riešení úlohy si vystačíme so známymi poznatkami o súčtoch a súčinoch párnych (P) a nepárnych (N) čísel, ktoré v skratke pripomíname v nasledujúcich tabuľkách:

+	P	N
P	P	N
N	N	P

·	P	N
P	P	P
N	P	N

Prvý výraz $2023n$ je súčinom nepárneho čísla s n, teda výsledok závisí od parity n. Hodnota tohto výrazu teda nie je vždy nepárna (napr. ak $n = 2$, tak $2023n = 4046$).

V druhom výraze je $n^2 + n$ vždy párne číslo: Pre n párne, resp. nepárne ide o súčet dvoch párnych, resp. dvoch nepárnych čísel. Zostávajúci sčítanec je nepárne číslo, teda pre akékoľvek n je hodnota výrazu $n^2 + n + 23$ vždy nepárna.

Tretí výraz $3n^3$ je súčinom nepárneho čísla s n^3, teda výsledok závisí od parity n. Hodnota tohto výrazu teda nie je vždy nepárna (napr. ak $n = 2$, tak $3n^2 = 24$).

Vo štvrtom výraze je $10n^2$ vždy párne číslo, pretože 10 je párne číslo. Zostávajúci sčítanec je nepárne číslo, teda pre akékoľvek n je hodnota výrazu $10n^2 + 2023$ vždy nepárna.

Nepárnotvorné sú teda výrazy $n^2 + n + 23$ a $10n^2 + 2023$.

Poznámka:

Vyššie diskutovaná nepárnosť časti druhého výrazu vyplýva aj zo vzťahu $n^2 + n = n(n+1)$. Na pravej strane je súčin dvoch po sebe idúcich čísel, je to teda súčin párneho a nepárneho čísla alebo naopak.

Pokyny:

Po 1 bode za každú správnu a odôvodnenú odpoveď; 2 body za celkovú kvalitu komentára.

---

4 V istom mnohouholníku platí, že pomer súčtu veľkostí jeho vnútorných uhlov a súčtu veľkostí k nim doplnkových uhlov je $3 : 5$.

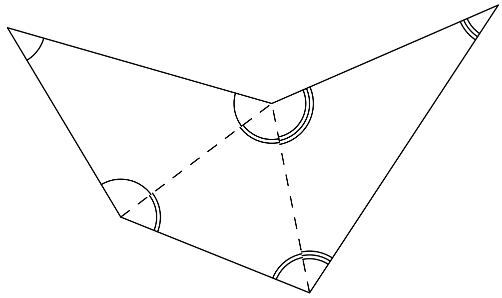
Koľko vrcholov má tento mnohouholník?

(*Doplnkový uhol* dopĺňa daný uhol do uhla plného.)

(Iveta Jančigová)

Riešenie 1:

Súčet veľkostí vnútorných uhlov v každom trojuholníku je 180°, štvoruholníku 360° a tak ďalej. Všeobecne platí, že každý n-uholník je možné zložiť z $n-2$ trojuholníkov, teda súčet jeho vnútorných uhlov je $(n-2)\cdot 180°$.



Súčet veľkostí doplnkových uhlov všeobecného n-uholníka je

$$n\cdot 360° - (n-2)\cdot 180° \quad \text{čiže} \quad (n+2)\cdot 180°.$$

Pomer týchto dvoch hodnôt je $(n-2) : (n+2)$, čo má podľa zadania byť $3 : 5$. Ekvivalentnými úpravami dostávame:

$$\frac{n-2}{n+2} = \frac{3}{5},$$

$$5n - 10 = 3n + 6,$$

$$2n = 16,$$

$$n = 8.$$

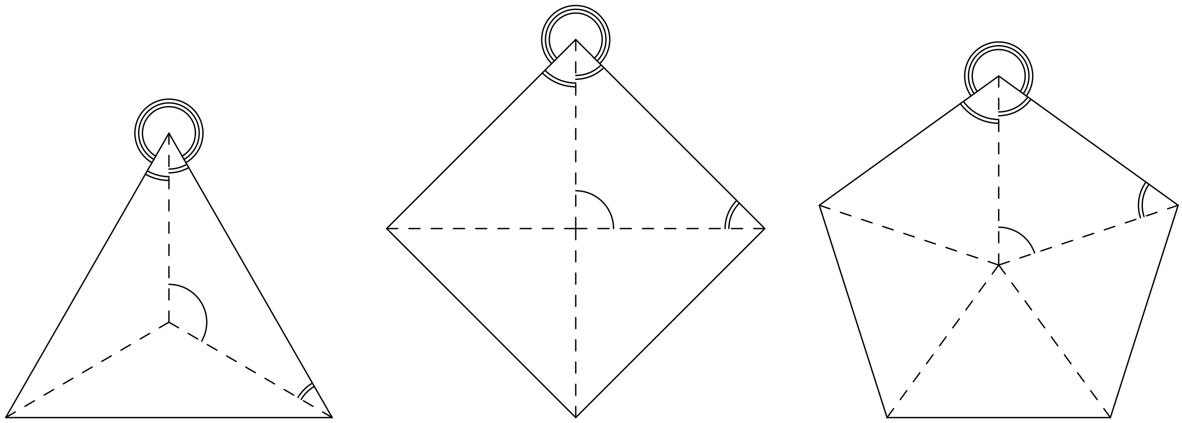
Neznámy mnohouholník je 8-uholník.

Riešenie 2:

Súčty veľkostí vnútorných, resp. doplnkových uhlov sú vo všetkých mnohouholníkoch s rovnakým počtom vrcholov rovnaké. Preto sa stačí zaoberať (napr.) len pravidelnými mnohouholníkmi.

Pravidelný n-uholník je možné zložiť z n navzájom zhodných rovnoramenných trojuholníkov. Vnútorný uhol pri hlavnom vrchole trojuholníka má veľkosť $\frac{1}{n}360°$, súčet vnútorných uhlov pri základni sa rovná vnútornému uhlu pravidelného n-uholníka a má veľkosť $180° - \frac{1}{n}\cdot 360°$. Doplnkový uhol pravidelného n-uholníka má teda veľkosť

$$360° - \left(180° - \frac{1}{n}\cdot 360°\right) \quad \text{čiže} \quad 180° + \frac{1}{n}\cdot 360.$$



Súčty veľkostí vnútorných a vonkajších uhlov sú postupne

$$n\left(180° - \frac{1}{n}\cdot 360°\right) \quad \text{čiže} \quad (n-2)\cdot 180°,$$

$$n\left(180° + \frac{1}{n}\cdot 360°\right) \quad \text{čiže} \quad (n+2)\cdot 180°.$$

Pomer týchto dvoch hodnôt je $(n-2) : (n+2)$, čo má byť $3 : 5$. Odtiaľ rovnakými ekvivalentnými úpravami ako vyššie dostávame $n = 8$.

Neznámy mnohouholník je 8-uholník.

Pokyny:

2 body za prípravné vyjadrenia v závislosti na n; 2 body za zostavenie a doriešenie rovnice; 2 body za kvalitu komentára.

Riešenie 3:

Rovnako ako v predchádzajúcom riešení sa zameriame len na pravidelné mnohouholníky, resp. na ich delenie na navzájom zhodné rovnoramenné trojuholníky (pozri obrázky vyššie).

V pravidelnom mnohouholníku je pomer súčtov veľkostí vnútorných a doplnkových uhlov rovnaký ako pomer veľkostí týchto uhlov pri každom jeho vrchole. Tento pomer je $3 : 5$ práve vtedy, keď vnútorný uhol neznámeho mnohouholníka má veľkosť $\frac{3}{8} \cdot 360°$ čiže $135°$ (lebo $3 + 5$ čiže 8 dielov zodpovedá plnému uhlu). Uhol pri hlavnom vrchole pomocného rovnoramenného trojuholníka, t. j. stredový uhol mnohouholníka, je $45°$ (aby súčet vnútorných uhlov trojuholníka bol $180°$). Tento uhol je osmina plného uhla. Neznámy mnohouholník je preto 8-uholník.

Poznámka:

Predchádzajúci nápad je možné spracovať postupným vyjadrovaním stredového, vnútorného, resp. doplnkového uhla pravidelného n-uholníka v závislosti na n a kontrolou požadovaného pomeru:

n	stredový	vnútorný	doplnkový	pomer
3	$120°$	$60°$	$300°$	$1 : 5$
4	$90°$	$90°$	$300°$	$1 : 3$
5	$72°$	$108°$	$300°$	$3 : 7$
6	$60°$	$120°$	$300°$	$1 : 2$
7	$\frac{1}{7} \cdot 360°$	$\frac{1}{7} \cdot 900°$	$\frac{1}{7} \cdot 1620°$	$5 : 9$
8	$45°$	$135°$	$225°$	$3 : 5$
…	…	…	…	…

Z geometrickej predstavy vyplýva, že pre zväčšujúce n hodnota pomeru vnútorného a doplnkového uhla postupne rastie k $1 : 1$. Teda ak má úloha riešenie, tak toto riešenie je jediné.

Pokyny:

Po 2 bodoch za veľkosti vnútorného a stredového uhla pravidelného mnohouholníka; 2 body za doriešenie a kvalitu komentára.

Pri postupnom skúšaní zohľadnite úplnosť komentára. Náhodne odhalené nezdôvodnené riešenie hodnoťte 2 bodmi.

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov.

Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Opäť upozorňujeme na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO https://skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete.

Prosíme, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X. Y. a práve traja žiaci (vrátane X. Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X. Y., tak žiakovi X. Y. patrí v poradí 6.–8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

Vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže