2011/2012
61. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala v utorok 17. januára 2012.*)

1. Označme S_n súčet všetkých n-ciferných čísel, ktorých dekadický zápis obsahuje iba cifry 1, 2, 3, každú aspoň raz. Nájdite všetky celé čísla $n \geqq 3$, pre ktoré je číslo S_n deliteľné siedmimi. (*Pavel Novotný*)

2. Dané je celé číslo a väčšie ako 1. Nájdite aritmetickú postupnosť s prvým členom a, ktorá obsahuje práve dve z čísel a^2, a^3, a^4, a^5 a má čo najväčšiu diferenciu. (Nepredpokladáme, že diferencia je nutne celočíselná.) (*Jaromír Šimša*)

3. Do kružnice je vpísaný šesťuholník $ABCDEF$, v ktorom platí $AB \perp BD$, $|BC| = |EF|$. Predpokladajme, že priamky BC, EF pretínajú polpriamku AD postupne v bodoch P, Q. Označme S stred uhlopriečky AD a K, L stredy kružníc vpísaných trojuholníkom BPS, EQS. Dokážte, že trojuholník KLD je pravouhlý. (*Tomáš Jurík*)

4. Predpokladajme, že pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

$$ab + cd = ac + bd = 4 \qquad \text{a} \qquad ad + bc = 5.$$

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu súčtu $a+b+c+d$ a zistite, ktoré vyhovujúce štvorice a, b, c, d ju dosahujú. (*Jaromír Šimša*)