61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

1. *Označme S_n súčet všetkých n-ciferných čísel, ktorých dekadický zápis obsahuje iba cifry 1, 2, 3, každú aspoň raz. Nájdite všetky celé čísla $n \geqq 3$, pre ktoré je číslo S_n deliteľné siedmimi.* (Pavel Novotný)

Riešenie. Súčet S_n nájdeme tak, že zistíme, koľkokrát sa ktorá cifra nachádza vo všetkých uvažovaných číslach na mieste jednotiek, desiatok, stoviek, atď. Potom určíme, aký je „príspevok" jednotlivých cifier do celkového súčtu.

Ak je cifra 1 na mieste jednotiek, tak zvyšných $n-1$ pozícií môžeme zaplniť 3^{n-1} spôsobmi (pre každú pozíciu máme tri možnosti). Takto sme ale bohužiaľ započítali aj čísla zložené len z jednotiek a dvojok, teda čísla neobsahujúce *aspoň jednu* cifru 3; tých je zrejme 2^{n-1}. Takisto nesmieme započítať ani čísla zložené len z jednotiek a trojok, ktorých je tiež 2^{n-1}. (Stále počítame s cifrou 1 na mieste jednotiek.)[1] Keďže číslo zložené zo samých jednotiek sa nachádza v obidvoch nesprávne započítaných skupinách (a žiadne iné také číslo nie je), navyše sme započítali $2 \cdot 2^{n-1} - 1$ čísel. Cifra 1 sa teda na mieste jednotiek nachádza k-krát, pričom $k = 3^{n-1} - (2 \cdot 2^{n-1} - 1) = 3^{n-1} - 2^n + 1$.

Rovnako veľa krát sa nachádza cifra 1 aj na každej ďalšej pozícii (za rovnakých podmienok zapĺňame vždy $n-1$ zvyšných pozícií). Pre príspevok p cifry 1 do celkového súčtu preto platí

$$p = k + 10k + 100k + \cdots + 10^{n-1}k = (1 + 10 + 100 + \cdots + 10^{n-1})k = \frac{10^n - 1}{9}k.$$

Príspevok cifry 2, resp. 3, je zrejme 2-krát, resp. 3-krát väčší ako príspevok cifry 1, keďže na jednotlivých pozíciách sa tieto cifry nachádzajú rovnako veľa krát ako cifra 1. Spolu máme

$$S_n = p + 2p + 3p = 6p = 6 \cdot \frac{10^n - 1}{9}k = \frac{2}{3}(10^n - 1)(3^{n-1} - 2^n + 1).$$

Toto číslo je deliteľné *prvočíslom* 7 práve vtedy, keď je ním deliteľný aspoň jeden z činiteľov $10^n - 1$, $3^{n-1} - 2^n + 1$ (činiteľ $\frac{2}{3}$ deliteľnosť siedmimi samozrejme neovplyvňuje). Vypíšeme činitele pre malé hodnoty n a vypíšeme tiež ich zvyšky po delení siedmimi.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$10^n - 1$	9	99	999	9 999	99 999	999 999	...	
zvyšok po delení 7	2	1	5	3	4	0	2	1
$3^{n-1} - 2^n + 1$	0	0	2	12	50	180	602	1 932
zvyšok po delení 7	0	0	2	5	1	5	0	0

Ako možno uhádnuť z tabuľky, postupnosť zvyškov činiteľa $10^n - 1$ po delení siedmimi je tvorená šesticou 2, 1, 5, 3, 4, 0, ktorá sa periodicky opakuje[2]. Dokázať to môžeme

[1] Čísla majúce na zvyšných $n-1$ pozíciách len dvojky a trojky započítavať budeme, pretože požadovanú aspoň jednu (a zároveň práve jednu) cifru 1 majú na mieste jednotiek.

[2] Pri vypĺňaní tabuľky nemusíme prácne deliť siedmimi čísla $10^n - 1$. Stačí využiť, že 10^{n+1} dáva po delení siedmimi rovnaký zvyšok ako 10-násobok *zvyšku* čísla 10^n.

napríklad tak, že ukážeme, že čísla $10^n - 1$ a $10^{n+6} - 1$ dávajú pre každé prirodzené n po delení siedmimi rovnaký zvyšok, teda že ich rozdiel je deliteľný siedmimi:

$$(10^{n+6} - 1) - (10^n - 1) = 10^{n+6} - 10^n = 10^n(10^6 - 1) = 7 \cdot 142\,857 \cdot 10^n.$$

(Pri poslednej úprave sa možno vyhnúť priamemu deleniu a skonštatovať, že z malej Fermatovej vety vyplýva $7 \mid 10^6 - 1$.)

Postupnosť zvyškov činiteľa $3^{n-1} - 2^n + 1$ po delení siedmimi je taktiež periodická a tvorí ju opakujúca sa šestica 0, 0, 2, 5, 1, 5, pretože rozdiel

$$\begin{aligned}(3^{n+5} - 2^{n+6} + 1) - (3^{n-1} - 2^n + 1) &= (3^{n+5} - 3^{n-1}) - (2^{n+6} - 2^n) = \\ &= 3^{n-1}(3^6 - 1) - 2^n(2^6 - 1) = 7 \cdot (104 \cdot 3^{n-1} - 9 \cdot 2^n)\end{aligned}$$

je pre každé prirodzené n deliteľný siedmimi.

Z uvedeného vyplýva, že S_n je deliteľné siedmimi (t. j. dáva zvyšok 0 po delení siedmimi) práve pre tie prirodzené čísla $n \geqq 3$, ktoré možno zapísať v tvare $6m$, $6m + 1$ alebo $6m + 2$ pre nejaké prirodzené číslo m, čiže pre čísla n dávajúce po delení šiestimi zvyšok 0, 1 alebo 2.

Za správne riešenie úlohy dajte 6 bodov. Za odvodenie vzorca pre výpočet S_n dajte 3 body; za kompletnú analýzu, pre ktoré n je $10^n - 1$, resp. $3^{n-1} - 2^n + 1$ deliteľné siedmimi, dajte 1 bod, resp. 2 body.

Pri analýze výrazu $10^n - 1$ bod udeľte aj v prípade, že riešiteľ len bez dôkazu prehlási, že postupnosť zvyškov je periodická od prvého opakujúceho sa člena, nakoľko táto skutočnosť je dostatočne evidentná a známa. Pri výraze $3^{n-1} - 2^n + 1$ je periodickosť s periódou dĺžky 6 nutné zdôvodniť (napr. tak, ako je uvedené v riešení, alebo osobitnou analýzou zvyškov jednotlivých mocnín 3^{n-1} a 2^n), bez toho z dvoch bodov jeden strhnite.

Ak žiak nesprávne odvodí vzorec pre S_n tak, že započíta aj čísla zložené len z dvoch rôznych cifier, t. j. pracuje so vzťahom $S_n = \frac{2}{3}(10^n - 1)3^{n-1}$, za prvú časť udeľte 1 bod (za správne určenie jednotlivých príspevkov, resp. iné odvodenie tohto vzťahu) a za druhú časť tiež 1 bod (za správnu analýzu deliteľnosti siedmimi výrazu $10^n - 1$), spolu teda najviac 2 body.

Ak žiak odvodí vzorec v tvare $S_n = \frac{2}{3}(10^n - 1)(3^{n-1} - 2^n)$ (t. j. nesprávne aplikuje princíp inklúzie a exklúzie a zabudne pripočítať 1), ktorý ďalej analyzuje správne, za prvú časť dajte 1 bod a za druhú 2 body (po jednom za každý činiteľ), teda spolu najviac 3 body.

---

2. *Dané je celé číslo a väčšie ako 1. Nájdite aritmetickú postupnosť s prvým členom a, ktorá obsahuje práve dve z čísel a^2, a^3, a^4, a^5 a má čo najväčšiu diferenciu. (Nepredpokladáme, že diferencia je nutne celočíselná.)* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Aritmetická postupnosť $\mathcal{A}$ s prvým členom a a kladnou diferenciou d obsahuje práve tie z čísel a^2, a^3, a^4, a^5, pre ktoré je príslušný rozdiel

$$\begin{aligned} a^2 - a &= a(a-1), \\ a^3 - a &= a(a-1)(a+1), \\ a^4 - a &= a(a-1)(a^2+a+1), \\ a^5 - a &= a(a-1)(a+1)(a^2+1) \end{aligned} \tag{1}$$

celým násobkom čísla d. Predpokladajme, že $\mathcal{A}$ obsahuje práve dve z čísel a^2, a^3, a^4, a^5.

Ak $a^2 \in \mathcal{A}$, tak prvý rozdiel $a(a-1)$ je celým násobkom d. Keďže $a \in \mathbb{Z}$, sú potom aj ostatné tri rozdiely v (1) (ktoré sú očividne celočíselnými násobkami prvého rozdielu) celými násobkami d. To však znamená, že $\mathcal{A}$ obsahuje všetky čísla a^2, a^3, a^4, a^5, čo je v spore s predpokladom, že obsahuje práve dve z nich. Preto $a^2 \notin \mathcal{A}$, teda $\mathcal{A}$ obsahuje práve dve z čísel a^3, a^4, a^5.

Ak $a^3 \notin \mathcal{A}$, tak nutne $a^4, a^5 \in \mathcal{A}$, čiže výrazy

$$\frac{a^4 - a}{d}, \qquad \frac{a^5 - a}{d}$$

sú oba celočíselné. Potom je celým číslom aj ich kombinácia

$$\frac{a^5 - a}{d} - a \cdot \frac{a^4 - a}{d} = \frac{a^2 - a}{d},$$

teda $a^2 \in \mathcal{A}$, čo je spor. Preto $a^3 \in \mathcal{A}$.

Dokázali sme, že hľadaná aritmetická postupnosť $\mathcal{A}$ musí obsahovať číslo a^3. Pre jej diferenciu d tak platí odhad $d \leqq a^3 - a$, pričom rovnosť nastane (t. j. diferencia bude najväčšia) v prípade, že a^3 je jej druhým členom. Aritmetická postupnosť s prvým členom a a diferenciou $d = a^3 - a$ určite neobsahuje číslo a^2, obsahuje a^3 a obsahuje aj $a + (a^2 + 1)(a^3 - a) = a^5$. Stačí už iba overiť, že neobsahuje a^4. To vyplýva z toho[3], že výraz

$$\frac{a^4 - a}{d} = \frac{a^4 - a}{a^3 - a} = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1} = a + \frac{1}{a + 1}$$

nie je celým číslom pre žiadne kladné celé číslo a.

Záver. Hľadaná postupnosť je aritmetická postupnosť s prvým členom a a diferenciou $d = a^3 - a$.

Poznámka. Ak uhádneme výsledok a ukážeme, že postupnosť s diferenciou $d = a^3 - a$ obsahuje a^3, a^5 a neobsahuje a^2, a^4, na dokončenie riešenia už stačí ukázať iba to, že diferencia nemôže byť väčšia ako $a^3 - a$. Ak je však diferencia väčšia, tak $\mathcal{A}$ zrejme neobsahuje a^2 ani a^3, musí teda obsahovať a^4 aj a^5 a z toho rovnako ako v uvedenom riešení možno odvodiť $a^2 \in \mathcal{A}$ a tým dôjsť k sporu.

Za správne riešenie úlohy dajte 6 bodov.

Ak žiak správne odvodí odhad $d \leqq a^3 - a$, skonštatuje, že najväčšia možná diferencia je $a^3 - a$, ale neukáže, že postupnosť s touto diferenciou vyhovuje, dajte len 4 body. Ďalší 1 bod dajte až za overenie, že v tomto prípade $a^5 \in \mathcal{A}$, resp. 1 bod za dôkaz, že $a^4 \notin \mathcal{A}$.

Ak naopak žiak ukáže, že postupnosť s diferenciou $a^3 - a$ obsahuje a^3, a^5 a neobsahuje a^2, a^4, ale nevysvetlí, prečo diferencia nemôže byť väčšia, dajte len 3 body.

V prípade, že sa riešiteľ nedostane k úvahám o diferencii $a^3 - a$, dajte 1 bod za dôkaz, že $a^2 \notin \mathcal{A}$ (t. j. za dôkaz implikácie $a^2 \in \mathcal{A} \Rightarrow a^3, a^4, a^5 \in \mathcal{A}$), 1 bod za dôkaz implikácie $a^3 \in \mathcal{A} \Rightarrow a^5 \in \mathcal{A}$ a 3 body za dôkaz implikácie $a^4, a^5 \in \mathcal{A} \Rightarrow a^2 \in \mathcal{A}$; spolu však v tejto vetve najviac 4 body.

[3] Argumentovať možno aj takto: V predošlom odseku sme všeobecne dokázali, že ak $a^4, a^5 \in \mathcal{A}$, tak $a^2 \in \mathcal{A}$. My už o $\mathcal{A}$ vieme, že obsahuje a^5 a neobsahuje a^2. Preto nemôže obsahovať a^4.

---

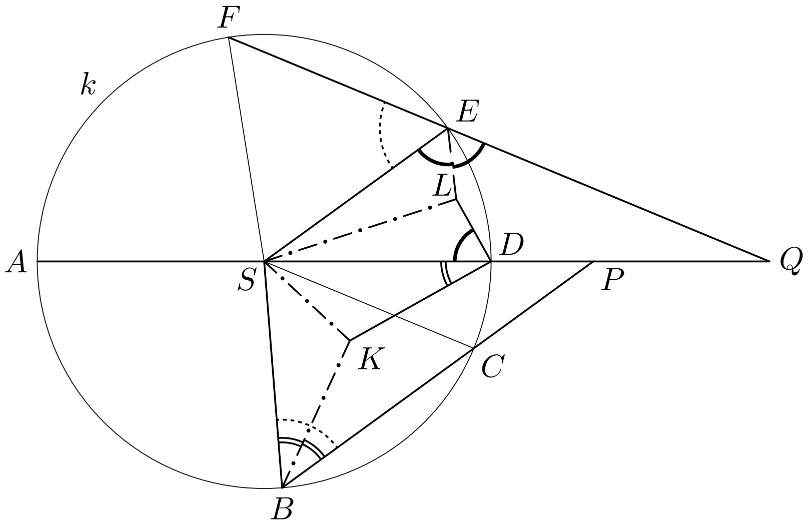
3. *Do kružnice je vpísaný šesťuholník $ABCDEF$, v ktorom platí $AB \perp BD$, $|BC| = |EF|$. Predpokladajme, že priamky BC, EF pretínajú polpriamku AD postupne v bodoch P, Q. Označme S stred uhlopriečky AD a K, L stredy kružníc vpísaných trojuholníkom BPS, EQS. Dokážte, že trojuholník KLD je pravouhlý.*

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Označme k kružnicu opísanú zadanému šesťuholníku. Keďže $AB \perp BD$, je k Tálesovou kružnicou nad priemerom AD a stred S uhlopriečky AD je zároveň stredom kružnice k.

Dokážeme, že trojuholník KLD má pravý uhol pri vrchole D. Veľkosť uhla KDL je súčtom veľkostí uhlov KDS a LDS. Trojuholníky KDS, KBS sú zhodné podľa vety *sus*: stranu SK majú spoločnú, strany SD, SB sú obe polomerom kružnice k a uhol pri vrchole S majú trojuholníky zhodný, lebo SK je osou uhla BSP (obr. 1). Preto $|\measuredangle KDS| = |\measuredangle KBS|$. Odtiaľ vzhľadom na to, že BK je osou uhla SBP, vyplýva $|\measuredangle KDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle CBS|$.

Analogickou úvahou (s využitím zhodnosti trojuholníkov LDS, LES) dostaneme $|\measuredangle LDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle QES|$.



Obr. 1

Pre dokončenie riešenia stačí aplikovať zatiaľ nepoužitý predpoklad $|BC| = |EF|$. Vďaka nemu sú podľa vety *sss* trojuholníky BCS, EFS zhodné (všetky ich zvyšné strany sú polomermi kružnice k), teda $|\measuredangle CBS| = |\measuredangle FES|$. Spojením odvodených poznatkov máme

$$|\measuredangle KDL| = |\measuredangle KDS| + |\measuredangle LDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle CBS| + \frac{1}{2}|\measuredangle QES| = \frac{1}{2}|\measuredangle FES| + \frac{1}{2}|\measuredangle QES| = \\ = \frac{1}{2}(|\measuredangle FES| + |\measuredangle QES|) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Za správne riešenie úlohy dajte 6 bodov. Z toho 1 bod za pozorovanie, že AD je priemerom k; 3 body za odvodenie rovností $|\measuredangle KDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle CBS|$, $|\measuredangle LDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle QES|$ (ak má riešiteľ len jednu z nich, dajte 2 body; ak ukáže len $|\measuredangle KDS| = |\measuredangle KBS|$ a/alebo $|\measuredangle LDS| = |\measuredangle LES|$, dajte 1 bod); 2 body za rovnosť $|\measuredangle CBS| = |\measuredangle FES|$ a úspešné dokončenie riešenia.

4. *Predpokladajme, že pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí*

$$ab + cd = ac + bd = 4 \qquad \text{a} \qquad ad + bc = 5.$$

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu súčtu $a+b+c+d$ a zistite, ktoré vyhovujúce štvorice a, b, c, d ju dosahujú. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Keďže zadané rovnosti obsahujú zmiešané súčiny premenných, výhodné je skúmať druhú mocninu súčtu $a + b + c + d$. Úpravou s dosadením zadaných rovností dostaneme

$$\begin{aligned}(a + b + c + d)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + cd + ac + bd + ad + bc) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(4 + 4 + 5) = a^2 + d^2 + b^2 + c^2 + 26.\end{aligned} \tag{1}$$

Využijeme známe nerovnosti $a^2 + d^2 \geqq 2ad$, $b^2 + c^2 \geqq 2bc$, v ktorých rovnosť platí práve vtedy, keď $a = d$ a $b = c$. Na základe toho z (1) máme

$$(a + b + c + d)^2 \geqq 2ad + 2bc + 26 = 2 \cdot 5 + 26 = 36.$$

Preto pre kladné čísla a, b, c, d musí platiť $a + b + c + d \geqq \sqrt{36} = 6$.

Rovnosť platí práve vtedy, keď $a = d$ a $b = c$. Dosadením do pôvodných rovností dostaneme sústavu

$$2ab = 4, \qquad a^2 + b^2 = 5.$$

Tú možno vyriešiť viacerými rôznymi postupmi. Napríklad môžeme vyjadriť

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 5 + 4 = 9,$$

teda $a + b = 3$ (keďže $a, b > 0$). Podľa Vièteových vzťahov sú a, b koreňmi kvadratickej rovnice $x^2 - 3x + 2 = 0$, teda $\{a, b\} = \{1, 2\}$. Ľahko overíme, že štvorice $a = d = 1$, $b = c = 2$, resp. $a = d = 2$, $b = c = 1$ skutočne spĺňajú zadané rovnosti a platí pre ne $a + b + c + d = 6$.

Odpoveď. Najmenšia možná hodnota súčtu $a + b + c + d$ je 6, dosahujú ju štvorice $(1, 2, 2, 1)$ a $(2, 1, 1, 2)$.

Iné riešenie. Z rovnosti $ab + cd = ac + bd$ vyplýva $a(b - c) = d(b - c)$, takže platí $a = d$ alebo $b = c$. Vzhľadom na symetriu môžeme uvažovať iba vyhovujúce štvorice (a, b, c, d), v ktorých je $d = a$, a hľadať tak najmenšiu hodnotu súčtu $S = 2a + b + c$ za predpokladu, že kladné čísla a, b, c spĺňajú rovnosti $a(b + c) = 4$ a $a^2 + bc = 5$.

Podľa Vièteových vzťahov sú potom kladné čísla b, c koreňmi kvadratickej rovnice

$$x^2 - \frac{4}{a}x + (5 - a^2) = 0.$$

Tá má dva kladné (nie nutne rôzne) korene práve vtedy, keď je jej diskriminant

$$D = \frac{16}{a^2} - 4(5 - a^2) = \frac{4(a^2 - 1)(a^2 - 4)}{a^2}$$

nezáporný a keď okrem nerovnosti $a > 0$ platí aj $a^2 < 5$. Dokopy to znamená, že $a \in \in (0, 1\rangle \cup \langle 2, \sqrt{5})$.

Všimnime si, že pre $a = 1$ vychádzajú korene $b = c = 2$, naopak pre $a = 2$ je $b = c = 1$. V oboch týchto prípadoch má zrejme výraz $S = 2a + b + c$ hodnotu 6. Ak ukážeme, že pre ostatné prípustné a platí $S > 6$, bude to znamenať, že $\min S = 6$ a že $(1, 2, 2, 1)$ a $(2, 1, 1, 2)$ sú jediné štvorice dávajúce nájdené minimum (keďže v oboch z nich platí $b = c$, žiadne iné také štvorice – napriek obmedzeniu našich úvah na prvú z možností $a = d$, $b = c$ – neexistujú). Z vyjadrenia rozdielu $S - 6$ v tvare

$$S - 6 = 2a + b + c - 6 = 2a + \frac{4}{a} - 6 = \frac{2(a-1)(a-2)}{a}$$

vidíme, že žiadaná nerovnosť $S > 6$ naozaj platí pre každé $a \in (0, 1) \cup (2, \sqrt{5})$.

Za správne riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho 4 body za odhad $a + b + c + d \geqq 6$ a 2 body za určenie štvoríc, pre ktoré platí rovnosť.

Ak riešiteľ na odhad štvorcov v (1) použije AG-nerovnosti $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, $c^2 + d^2 \geqq 2cd$ a odvodí tak slabší odhad $a + b + c + d \geqq \sqrt{34}$, dajte 2 body.

Pri postupe ako v druhom riešení dajte 1 bod za odvodenie rovnosti $(a - d)(b - c) = 0$, 1 bod za prechod k riešeniu sústavy o dvoch neznámych b, c s parametrom a, 2 body za nájdenie množiny prípustných hodnôt a (alebo aspoň odvodenie nutnej podmienky $a \leqq 1 \vee a \geqq 2$), 1 bod za dôkaz nerovnosti $2a + 4/a \geqq 6$ pre všetky prípustné a a 1 bod za určenie oboch hľadaných štvoríc.

V prípade, že žiak len uhádne výsledok a objaví štvorice $(1, 2, 2, 1)$ a $(2, 1, 1, 2)$, dajte 1 bod (tento bod udeľte len v prípade, že žiak v úlohe nezíska žiadne iné body).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012