

61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012

Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z5

Informácia pre obvodnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie pridružuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. Vojto si kúpil 24 rovnako veľkých štvorcových dlaždíc. Strana každej dlaždice merala 40 cm. Zo všetkých dlaždíc postavil pred svoju chatku obdĺžnikovú plošinu s najmenším možným obvodom. Koľko meral obvod tejto obdĺžnikovej plošiny? (Vojto dlaždice nerezal ani inak nelámal.) (L. Hozová)

Riešenie. Prejdeme postupne všetky možnosti; pri každej uvedieme rozmery takého obdĺžnika v „dlaždiciach“ a ďalej obvod v „dlaždiciach“ (resp. v „stranách dlaždíc“):

- rozmery: 1×24 , obvod: $2 \cdot (1 + 24) = 50$,
- rozmery: 2×12 , obvod: $2 \cdot (2 + 12) = 28$,
- rozmery: 3×8 , obvod: $2 \cdot (3 + 8) = 22$,
- rozmery: 4×6 , obvod: $2 \cdot (4 + 6) = 20$.

Je zrejmé, že najmenší obvod vyjadrený v centimetroch/metroch musí byť zároveň najmenší aj pri vyjadrení v „dlaždiciach“. Najmenší obvod dostávame vo štvrtom prípade – 20 dlaždíc. Ak je strana jednej dlaždice dlhá 40 cm, tak 20 takých strán meria spolu $20 \cdot 40 = 800$ (cm). Obvod vydláždeného obdĺžnika meral 8 metrov.

Návrh hodnotenia. 1 bod za myšlienku riešenia; po 1 bode za každú správne uvedenú a rozobranú možnosť; 1 bod za výsledok.

Ak riešiteľ neuvedie všetky možnosti a nevyvetlí, prečo niektoré z nich vynechal (napr. pri prvej možnosti, že je obvod príliš dlhý v porovnaní s ostatnými obvodmi), môže získať najviac 4 body, a to aj vtedy, ak uvedie správny výsledok.

2. Lúpežník Rumcajs učil Cipúšika písať čísla. Ako prvé napísal Cipúšik číslo 1, potom napísal číslo 2 a potom pokračoval písaním ďalších bezprostredne po sebe idúcich prirodzených čísel. O chvíľu to Cipúšika prestalo baviť a prosil, aby prestali. Rumcajs sa nechal prehovoriť a písanie skončili. Ktoré číslo napísal Cipúšik ako posledné, ak sa cifra nula nachádza v napísaných číslach 35-krát? (M. Krejčová)

Riešenie. Vypísaním jednociferných čísel žiadnu nulu nezískame. Dvojciferné čísla obsahujúce nulu sú:

$$10, 20, \dots, 90 \quad 9 \text{ núl}$$

Trojciferné čísla obsahujúce nulu sú:

100	2 nuly	(celkom zatiaľ 11 núl)
101, 102, ..., 109	9 núl	(celkom zatiaľ 20 núl)
110, 120, ..., 190	9 núl	(celkom zatiaľ 29 núl)
200	2 nuly	(celkom zatiaľ 31 núl)
201, 202, 203, 204	4 nuly	(celkom zatiaľ 35 núl)

Cipúšik napísal ako posledné číslo 204. (Číslo 205 už napísať nemohol, lebo to už by obsahovalo 36. nulu.)

Iné riešenie. Postupne vypisujeme tie čísla, ktoré obsahujú aspoň jednu nulu. V zátvorke za každým z nich je uvedené, koľko núl celkom sme už napísali, keď sme dopísali príslušné číslo.

10 (1), 20 (2), 30 (3), 40 (4), 50 (5), 60 (6), 70 (7), 80 (8), 90 (9), 100 (11), 101 (12), 102 (13), 103 (14), 104 (15), 105 (16), 106 (17), 107 (18), 108 (19), 109 (20), 110 (21), 120 (22), 130 (23), 140 (24), 150 (25), 160 (26), 170 (27), 180 (28), 190 (29), 200 (31), 201 (32), 202 (33), 203 (34), 204 (35), 205 (36), ...

Cipúšikovo posledné napísané číslo bolo 204.

Návrh hodnotenia. 1 bod za určenie počtu núl v číslach 1 až 99; 4 body za počty núl v trojciferných číslach; 1 bod za poznatok, že 35. nula je v čísle 204. Ak riešiteľ nejakú nulu prehliadne, strhnete bod, ak by takých prehliadnutí bolo viac, dajte najviac 4 body.

3. Na drôte sedí 9 lastovičiek, pričom vzdialenosť každých dvoch susedných lastovičiek je rovnaká. Vzdialenosť prvej a poslednej lastovičky je 720 cm.

- Aká je vzdialenosť dvoch susedných lastovičiek?
- Koľko by na drôte sedelo lastovičiek, keby si medzi každé dve susedné lastovičky, ktoré práve teraz sedia na drôte, sadli ďalšie tri?

(M. Krejčová)

Riešenie. Medzi deviatimi lastovičkami je len 8 medzier.

- Vzdialenosť susedných lastovičiek je $720 : 8 = 90$ (cm).
- Keby si do každej z ôsmich medzier sadli 3 nové lastovičky, pribudlo by spolu $8 \cdot 3 = 24$ lastovičiek. Na drôte by potom sedelo $9 + 24 = 33$ lastovičiek.

Návrh hodnotenia. 1 bod za poznatok o počte medzier; 2 body za prvú časť; 3 body za druhú časť úlohy.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Trojáková

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Trojáková

Redakčná úprava: Erika Trojáková, Vojtěch Žádník

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012