61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z9*

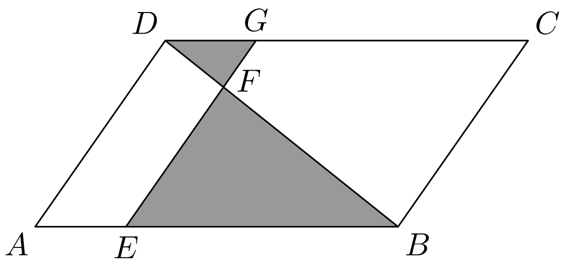
<u>*Informácia pre obvodnú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie opravených riešení obvodných kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 20. februára.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. *Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* skmo@skmo.sk *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* skmo.sk/dokument.php?id=429 *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

1. *Daný je kosodĺžnik $ABCD$ ako na obr. 1. Po strane AB sa pohybuje bod E a po strane DC sa pohybuje bod G tak, že úsečka EG je stále rovnobežná s AD. Keď bol priesečník F úsečiek EG a DB v pätine uhlopriečky DB (bližšie k bodu D), bol obsah vyfarbenej časti kosodĺžnika o $1\,\mathrm{cm}^2$ väčší, ako keď bol F v dvoch pätinách DB (opäť bližšie k D). Určte obsah kosodĺžnika $ABCD$.* (E. Patáková)



Obr. 1

Riešenie. Dĺžku strany AB označme a a veľkosť výšky kosodĺžnika $ABCD$ na túto stranu označme v; obsah kosodĺžnika je rovný av. Trojuholníky DGF a BEF sú podobné podľa vety *uu* (uhly DFG a BFE sú vrcholové, uhly FEB a FGD striedavé). Ďalej označme v_1 veľkosť výšky trojuholníka DGF na stranu DG a v_2 veľkosť výšky trojuholníka BEF na stranu BE.

a) Bod F je v jednej pätine uhlopriečky DB. Pomer podobnosti trojuholníkov DGF a BEF je v tomto prípade $1:4$. Pre zodpovedajúce si výšky týchto trojuholníkov platí $v_1 + v_2 = v$. Z uvedeného vyplýva, že $v_1 = \frac{1}{5}v$ a $v_2 = \frac{4}{5}v$. Všimnime si, že $|DG| = |AE|$, a teda že pre dĺžky zodpovedajúcich si strán týchto trojuholníkov platí $|DG| + |BE| = a$. Preto $|DG| = \frac{1}{5}a$ a $|BE| = \frac{4}{5}a$ a obsahy vyfarbených trojuholníkov sú

$$S_{DGF} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}a \cdot \frac{1}{5}v\right) = \frac{1}{50}av,$$

$$S_{BEF} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}a \cdot \frac{4}{5}v\right) = \frac{16}{50}av.$$

Vyfarbená časť kosodĺžnika má v tomto prípade obsah

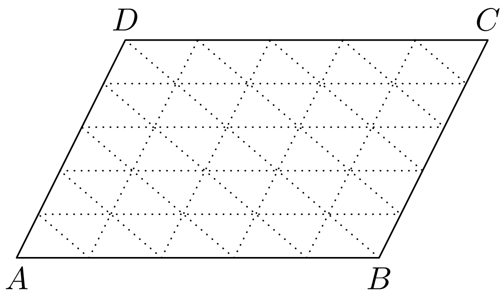
$$S_{DGF} + S_{BEF} = \frac{17}{50} av.$$

b) Bod F je v dvoch pätinách uhlopriečky DB. Pomer podobnosti trojuholníkov DGF a BEF je v tomto prípade $2 : 3$. Podobne ako v predchádzajúcom odseku odvodíme, že $S_{DGF} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}a \cdot \frac{2}{5}v\right) = \frac{4}{50}av$ a $S_{BEF} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}a \cdot \frac{3}{5}v\right) = \frac{9}{50}av$. Vyfarbená časť kosodĺžnika má v tomto prípade obsah

$$S_{DGF} + S_{BEF} = \frac{13}{50} av.$$

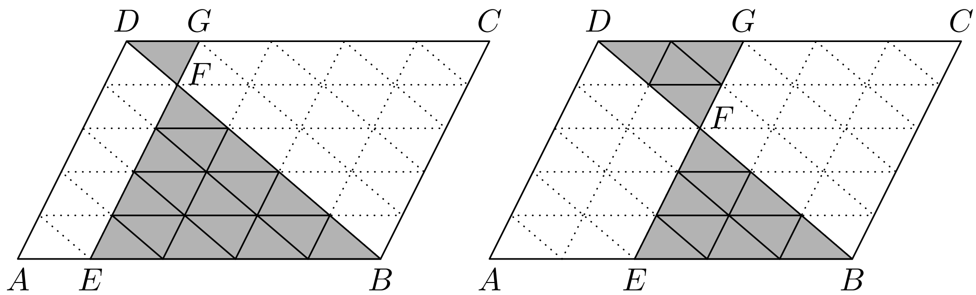
Zo zadania vieme, že rozdiel $\frac{17}{50}av - \frac{13}{50}av = \frac{2}{25}av$ je práve $1\,\mathrm{cm}^2$. Z toho vyplýva, že $av = \frac{25}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Obsah kosodĺžnik $ABCD$ je $12{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

Iné riešenie. Úsečky AB a BC rozdelíme na pätiny. Rovnobežky s týmito úsečkami vedené vzniknutými bodmi rozdelia kosodĺžnik $ABCD$ na 25 zhodných kosodĺžničkov. Ak vyznačíme ešte aj rovnobežky s uhlopriečkou DB, bude kosodĺžnik $ABCD$ rozdelený na 50 zhodných trojuholníčkov ako na obr. 2.



Obr. 2

Keď je bod F v jednej pätine uhlopriečky DB, tak vyfarbená časť kosodĺžnika pozostáva zo 17 trojuholníčkov. Keď je bod F v dvoch pätinách uhlopriečky DB, vyfarbená časť kosodĺžnika pozostáva z 13 trojuholníčkov (obr. 3).



Obr. 3

Rozdiel $1\,\mathrm{cm}^2$ zodpovedá obsahu 4 trojuholníčkov. Obsah kosodĺžnika $ABCD$ je teda rovný $50 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{2} = 12{,}5\,(\mathrm{cm}^2)$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za nájdenie vlastnosti, pomocou ktorej možno porovnať obsahy vyfarbených trojuholníkov (napr. podobnosť, rozdelenie na trojuholníčky a pod.); 3 body za vyjadrenie vzťahu, z ktorého možno presne určiť rozdiel obsahov v daných situáciách (napr. rovnice vyplývajúce z podobnosti trojuholníkov, zistenie, o koľko trojuholníčkov sa vyfarbené časti líšia a pod.); 2 body za dopočítanie obsahu kosodĺžnika $ABCD$.

2. *Snehulienka má na záhrade 101 sadrových trpaslíkov zoradených podľa hmotnosti od najťažšieho po najľahšieho, pričom rozdiel hmotností každých dvoch susedných trpaslíkov je rovnaký. Raz Snehulienka trpaslíkov vážila a zistila, že prvý (teda najťažší) trpaslík váži presne 5 kg. Snehulienku však najviac prekvapilo, že keď na váhu postavila všetkých trpaslíkov od 76. po 80., vážili dokopy rovnako ako všetci trpaslíci od 96. po 101. Koľko váži najľahší trpaslík?* (M. Mach)

Riešenie. Označme x rozdiel hmotností dvoch susedných trpaslíkov. Prvý trpaslík váži 5 kg, druhý $5-x$, tretí $5-2x$, ..., n-tý trpaslík váži $5-(n-1)\cdot x$ (kg). Súčet hmotností 76. až 80. trpaslíka je

$$(5-75x)+(5-76x)+(5-77x)+(5-78x)+(5-79x)=25-385x.$$

Súčet hmotností 96. až 101. trpaslíka je

$$(5-95x)+(5-96x)+(5-97x)+(5-98x)+(5-99x)+(5-100x)=30-585x.$$

Dostávame teda rovnicu, z ktorej vypočítame x:

$$\begin{aligned} 25-385x &= 30-585x,\\ 200x &= 5,\\ x &= 0{,}025 \text{ (kg)}. \end{aligned}$$

Najľahší trpaslík váži $5-100\cdot 0{,}025=2{,}5$ (kg).

Iné riešenie. Označme x rozdiel hmotností dvoch susedných trpaslíkov. Prvý trpaslík váži 5 kg, druhý $5-x$, tretí $5-2x$, ..., 101. trpaslík váži $5-100x$ (kg).

Rozdiel hmotností 76. a 96. trpaslíka je $20x$. Rovnaký rozdiel je aj medzi 77. a 97., 78. a 98., 79. a 99., 80. a 100. trpaslíkom. Celková hmotnosť 76. až 80. trpaslíka je teda o $100x$ väčšia ako celková hmotnosť 96. až 100. trpaslíka. Aby 76. až 80. trpaslík vážili dokopy presne toľko ako 96. až 101. trpaslík, musí byť hmotnosť 101. trpaslíka rovná $100x$.

Získavame teda rovnicu, z ktorej jednoducho vypočítame x:

$$\begin{aligned} 5-100x &= 100x,\\ 200x &= 5,\\ x &= 0{,}025 \text{ (kg)}. \end{aligned}$$

Najľahší trpaslík váži $100\cdot 0{,}025=2{,}5$ (kg).

Návrh hodnotenia. 4 body za zostavenie rovnice umožňujúcej výpočet rozdielu hmotností dvoch susedných trpaslíkov; 2 body za úpravy rovnice a výsledok úlohy.

Poznámka. Ani v jednom uvedenom riešení súťažiaci nemusí nutne vypočítať, že $x=0{,}025$ kg. Stačí mu napr. zistenie, že $100x=2{,}5$ kg.

3. *Turistický oddiel usporiadal trojdňový cyklistický výlet. Prvý deň chceli prejsť $\frac{1}{3}$ celej plánovanej trasy, ale prešli o 4 km menej ako chceli. Druhý deň chceli prejsť viac: polovicu zvyšku, ale prešli o 2 km menej ako chceli. Tretí deň však všetko dobehli a prešli $\frac{10}{11}$ zvyšku trasy a ešte 4 km, takže dorazili do plánovaného cieľa. Aká dlhá bola trasa a koľko prešli prvý, druhý a tretí deň?* (M. Volfová)

Riešenie. Postupujeme úvahou „odzadu“.

$\frac{1}{11}$ zvyšku cesty po druhom dni je rovná 4 km, teda celý zvyšok bol $11 \cdot 4 = 44$ (km). Keby druhý deň prešli (ako plánovali) o 2 km viac, bol by zvyšok po druhom dni o 2 km menší, teda len 42 km, a tvoril by polovicu toho, čo po prvom dni ostávalo do cieľa. Po prvom dni ostávalo do cieľa 84 km.

Keby prvý deň prešli podľa plánu celú $\frac{1}{3}$ trasy, teda o 4 km viac, bol by zvyšok o 4 km menší, t. j. len 80 km, a predstavoval by $\frac{2}{3}$ celej trasy. $\frac{1}{3}$ trasy bola teda 40 km a celá 120 km.

Predošlé zistenia zhrnieme, pričom spočítame prejdené vzdialenosti v jednotlivých dňoch. Prvý deň chceli prejsť 40 km, ale prešli len 36 km; ostávalo im do cieľa 84 km. Druhý deň chceli prejsť polovicu zvyšku, t. j. 42 km, ale prešli len 40 km; ostávalo im 44 km. Tretí deň prešli $\frac{10}{11}$ zvyšku, t. j. 40 km, a ešte 4 km; boli teda v cieli.

V jednotlivých dňoch prešli postupne 36 km, 40 km a 44 km, dokopy 120 km.

Iné riešenie. Postupujeme pomocou algebry „odpredu“; dĺžku celej trasy v km označíme x.

Prvý deň prešli $\frac{1}{3}x - 4$, zvýšilo im $\frac{2}{3}x + 4$.

Druhý deň prešli $\frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3}x + 4) - 2 = \frac{1}{3}x$, zvýšilo im $\frac{1}{3}x + 4$.

Tretí deň prešli $\frac{10}{11} \cdot (\frac{1}{3}x + 4) + 4 = \frac{10}{33}x + \frac{40}{11} + 4$.

Dĺžka celej trasy teda bola

$$x = \frac{1}{3}x - 4 + \frac{1}{3}x + \frac{10}{33}x + \frac{40}{11} + 4.$$

Po úpravách dostávame

$$\begin{aligned} \frac{1}{33}x &= \frac{40}{11}, \\ x &= 120. \end{aligned}$$

Po dosadení do vyššie uvedených výrazov zisťujeme, že v jednotlivých dňoch prešli postupne 36 km, 40 km a 44 km, dokopy teda 120 km.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za dĺžku trasy prvý, druhý a tretí deň a dĺžku celej trasy; zvyšné 2 body podľa úplnosti komentára.

4. *Organizátor výstavy „Staviam, staviaš, staviame“ rozdelil výstavu na dve časti: „Vývoj stavebných techník“ a „Budovy z iného uhla“. Keďže ho zaujímala reakcia návštevníkov, vyplnil každý návštevník pri odchode jednoduchý dotazník. Vyplynuli z neho tieto zaujímavé skutočnosti:*

- *medzi tými, ktorým sa páčila prvá časť, bolo 96 % takých, ktorým sa páčila aj druhá časť;*
- *medzi tými, ktorým sa páčila druhá časť, bolo 60 % takých, ktorým sa páčila aj prvá časť;*
- *medzi všetkými návštevníkmi bolo 59 % takých, ktorým sa nepáčila ani prvá ani druhá časť.*

Koľko percent všetkých návštevníkov uviedlo, že sa im páčila prvá časť výstavy?
(M. Petrová)

Riešenie. Označme n počet všetkých ľudí, ktorí navštívili výstavu, ďalej p počet návštevníkov, ktorým sa páčila prvá časť výstavy, a d počet návštevníkov, ktorým sa páčila druhá časť výstavy. Hľadáme nejaký vzťah medzi n a p, z ktorého už ľahko odvodíme odpoveď na otázku.

Vyjadríme počet návštevníkov, ktorým sa páčili obe časti: z prvej podmienky to je $0{,}96p$, z druhej podmienky $0{,}6d$. Samozrejme platí

$$\begin{aligned} 0{,}96p &= 0{,}6d, \\ 96p &= 60d, \\ 8p &= 5d, \\ 1{,}6p &= d. \end{aligned}$$

Odtiaľ môžeme vyjadriť počet ľudí v jednotlivých skupinách pomocou p. Počet ľudí, ktorým sa páčila

- prvá časť, ale nie druhá časť, je $p - 0{,}96p = 0{,}04p$,
- druhá časť, ale nie prvá časť, je $d - 0{,}6d = 0{,}4d = 0{,}4 \cdot 1{,}6p = 0{,}64p$,
- prvá aj druhá časť, je samozrejme $0{,}96p$.

Sčítaním zistíme, koľkým ľuďom sa páčila aspoň jedna časť výstavy:

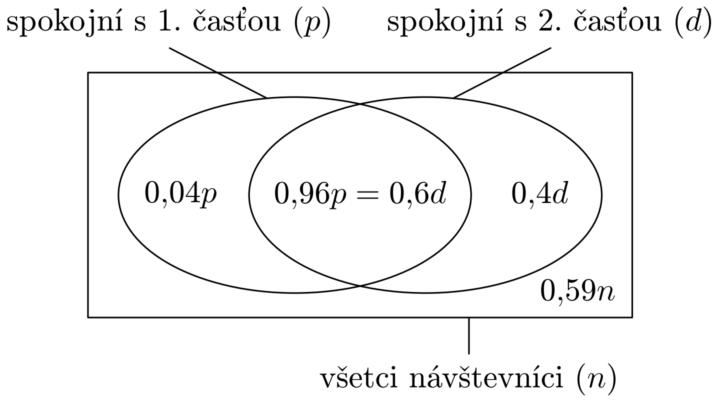
$$0{,}04p + 0{,}64p + 0{,}96p = 1{,}64p.$$

Podľa tretej podmienky v zadaní vieme, že $0{,}59n$ návštevníkom sa nepáčila ani jedna časť výstavy; teda $0{,}41n$ návštevníkom sa aspoň jedna časť výstavy páčila. Tento počet zároveň podľa predošlého zodpovedá $1{,}64p$. Zostavíme rovnicu, ktorú ďalej upravíme:

$$\begin{aligned} 0{,}41n &= 1{,}64p, \\ 41n &= 164p, \\ n &= 4p, \\ 0{,}25n &= p. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že 25 % všetkých návštevníkov uviedlo, že sa im páčila prvá časť výstavy.

Vzťahy medzi skúmanými počtami návštevníkov môžeme znázorniť napr. diagramom na obr. 4.



Obr. 4

Návrh hodnotenia. 2 body za vyjadrenie $d = 1{,}6p$ či analogický vzťah; 2 body za vyjadrenie počtu návštevníkov, ktorým sa páčila aspoň jedna časť, pomocou počtu návštevníkov, ktorým sa páčila prvá časť (alebo za analogický poznatok); 2 body za výsledných 25 %.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Trojáková
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Trojáková
Redakčná úprava:	Erika Trojáková, Vojtěch Žádník
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012