
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Zadania úloh 1. časti celoštátneho kola kategórie A

1 Alica a Bohuš hrajú hru na pláne so 72 políčkami rozmiestnenými po obvode kruhu. Na začiatku Bohuš položí na niektoré políčka po jednom žetóne. V každom kole najskôr Alica zvolí jedno prázdne políčko a Bohuš potom naň musí posunúť žetón z jedného susedného políčka. Ak to nedokáže, hra končí, inak nasleduje ďalšie kolo. Určte najmenší počet žetónov, pre ktorý Bohuš vie zabezpečiť, že v hre prebehne aspoň 2023 kôl.

2 Nech n je celé číslo, kde $n \geq 3$, a a_1, a_2, \dots, a_n sú dĺžky strán ľubovoľného n -uholníka. Dokážte nerovnosť

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > \sqrt{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}.$$

3 V ostrouhlom trojuholníku ABC označme H priesečník jeho výšok a I stred kružnice do neho vpísanej. Nech D je kolmým priemetom bodu I na priamku BC a E je obrazom bodu A v súmer-
nosti so stredom I . Ďalej nech F je kolmým priemetom bodu H na priamku ED . Dokážte, že body B, H, F a C ležia na jednej kružnici.

1. časť celoštátneho kola MO kategórie A sa koná v **pondelok 20. marca 2023** od **8:30** do **13:00**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4,5 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 7 bodov.

Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály.

Vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Zadania úloh 2. časti celoštátneho kola kategórie A

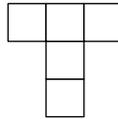
4 Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť kladných celých čísel taká, že ak $n \geq 0$, tak

$$a_{n+2} = a_0 a_1 + a_1 a_2 + \dots + a_n a_{n+1} - 1.$$

- a) Dokážte, že niektoré prvočíslo je deliteľom nekonečne veľa členov tejto postupnosti.
b) Dokážte, že takých prvočísel je nekonečne veľa.

5 V trojuholníku ABC označme M, N, P postupne stredy strán BC, CA, AB a G jeho ťažisko. Nech kružnica opísaná trojuholníku BGP pretína priamku MP v bode K rôznom od P a kružnica opísaná trojuholníku CGN pretína priamku MN v bode L rôznom od N . Dokážte, že $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$.

6 Nech n je kladné celé číslo, kde $n \geq 3$. Uvažujme štvorčekový papier s rozmermi $n \times n$, ktorého jednotlivé štvorčeky môžu mať buď bielu, alebo čiernu farbu. V každom kroku zmeníme farby piatich štvorčekov, ktoré tvoria útvar



v ľubovoľnom natočení. Na začiatku sú všetky štvorčeky biele. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dosiahnuť to, že všetky štvorčeky budú čierne.

2. časť celoštátneho kola MO kategórie A sa koná v **utorok 21. marca 2023** od **8:30** do **13:00**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4,5 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 7 bodov.

Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály.

Vydali: Slovenská komisia MO a IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže
