MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh 1. dňa celoštátneho kola kategórie A

1 Alica a Bohuš hrajú hru na pláne so 72 políčkami rozmiestnenými po obvode kruhu. Na začiatku Bohuš položí na niektoré políčka po jednom žetóne. V každom kole najskôr Alica zvolí jedno prázdne políčko a Bohuš potom naň musí posunúť žetón z jedného susedného políčka. Ak to nedokáže, hra končí, inak nasleduje ďalšie kolo. Určte najmenší počet žetónov, pre ktorý Bohuš vie zabezpečiť, že v hre prebehne aspoň 2023 kôl.

(Václav Blažej)

Riešenie 1:

Ukážeme, že hľadaný najmenší možný počet žetónov je 36.

V prvej časti popíšeme stratégiu Bohuša, pri ktorej s 36 žetónmi dokáže zabezpečiť, aby hra po žiadnom počte kôl neskončila. Na začiatku Bohuš rozmiestni 36 žetónov na každé druhé políčko hracieho plánu a napevno rozdelí všetkých 72 políčok na 36 dvojíc susediacich políčok. Môže žetóny posúvať tak, aby v priebehu celej hry bol v každej vytvorenej dvojici políčok práve jeden žetón: V každom kole totiž Alica musí zvoliť prázdne políčko v niektorej dvojici, Bohuš potom naň presunie žetón z druhého políčka tejto dvojice. Hra teda nikdy neskončí.

V druhej časti riešenia budeme predpokladať, že Bohuš na začiatku rozmiestni na hrací plán menej ako 36 žetónov. Popíšeme stratégiu Alice, pri ktorej dokáže zabezpečiť, aby hra skončila najneskôr 36. kolom.

Na úvod si Alica predstaví, že políčka sú nastálo zafarbené striedavo bielou a čiernou farbou. V každom kole potom Alica zvolí ktorékoľvek prázdne biele políčko – také vždy nájde, lebo bielych políčok je 36, zatiaľ čo všetkých žetónov je menej. Bohuš tak bude nútený v každom kole presunúť žetón z niektorého čierneho políčka na biele. S každým žetónom tak bude v priebehu celej hry môcť ťahať najviac raz a len s tými, ktoré na začiatku stáli na čiernom políčku. Hra teda skutočne skončí najneskôr 36. kolom.

Riešenie 2:

Uvedieme odlišný prístup iba k druhej časti 1. riešenia. Budeme teda opäť predpokladať, že Bohuš na začiatku rozmiestni na hrací plán menej ako 36 žetónov, teraz navyše tak, že žiadne tri susedné políčka nebudú prázdne – inak Alica hru ukončí prvým kolom tým, že zvolí prostredné z týchto troch políčok. Ukážeme, že po nanajvýš 34 kolách si Alica vhodnou stratégiou vynúti situáciu, keď takéto tri políčka už budú existovať. (V poznámke za týmto riešením načrtneme, ako Alica môže túto stratégiu ďalej vylepšiť, aby ukončila hru prípadne ešte skôr.)

Prázdne políčka sú teda rozdelené do niekoľkých súvislých úsekov, tvorených vždy jedným alebo dvoma políčkami. Také úseky s dvoma políčkami existujú aspoň dva – aspoň jeden nájdeme pri každom z oboch rozdelení všetkých 72 políčok na 36 dvojíc susedných políčok, lebo žetónov je najviac 35.

Alica umiestni medzi každé dve prázdne susedné políčka zarážku (a po každom kole vykoná korekciu polohy jednej z nich). Na začiatku tieto zarážky v počte z, kde $z \geq 2$, rozdelia všetkých 72 políčok na z úsekov. Každý z nich pritom obsahuje aspoň 3 políčka, *začína sa aj končí sa prázdnym políčkom a neobsahuje dve susediace prázdne políčka*. Alica určite môže z týchto úsekov vybrať jeden, označme ho ďalej U, v ktorom je žetónov menej ako prázdnych políčok (táto nerovnosť totiž platí pre ich celkové počty).

Nech k je to celé číslo také, že $k \geq 1$, pri ktorom vybraný úsek U obsahuje $k + 1$ prázdnych políčok a najviac k žetónov. Týchto žetónov však musí byť práve k – po jednom v každej z k „medzier" medzi prázdnymi $k + 1$ políčkami. Úsek U je tak tvorený nepárnym počtom $2k+1$ políčok, pričom navyše zrejme platí $2k+1 \leq 72-3 = 69$, čiže $k \leqq 34$. Pri zrejmom označení potom obsadenosť políčok v okolí týchto dvoch zarážok okolo úseku U vyzerá takto:

$$\ldots 0 \mid \underbrace{0\,1\,0\,1\,\ldots\,0\,1\,0}_{U} \mid 0 \ldots$$

Alica v prvom kole zvolí v úseku U prvé políčko zľava. Bohuš je potom donútený k presunu žetónu sprava – tým sa ľavá zarážka posunie o dve pozície doprava, takže vznikne nový úsek U' dĺžky $2k-1$:

$$\ldots 0 \mid \underbrace{0\,1\,0\,1\,\ldots\,0\,1\,0}_{U} \mid 0 \ldots \;\rightarrow\; \ldots 0\,1\,0 \mid \underbrace{0\,1\,0\,1\,\ldots\,0\,1\,0}_{U'} \mid 0 \ldots$$

V druhom kole Alica v úseku U' zvolí opäť prvé políčko zľava. Procedúru neustále opakuje, až po k. kole, kde, ako vieme, $k \leq 34$, dostane úsek medzi dvoma zarážkami tvorený jedným políčkom, ktoré tak je prostredným v trojici susediacich prázdnych políčok. Tým je tvrdenie z úvodného odseku dokázané.

Poznámka:

Možno dokázať, že Alica môže úsek U z predchádzajúceho riešenia vybrať tak, aby bol tvorený najviac 35 políčkami. Okrem toho môže Alica svoju stratégiu pozmeniť tak, že v úseku U ukáže nie na krajné, ale buď na prostredné prázdne políčko, alebo na jedno z políčok vedľa prostredného obsadeného. Potom sa po Bohušovom ťahu objaví v úseku U nová zarážka, ktorá ho rozdelí na dva úseky – za U' potom Alica vyberie kratší z nich. Opakovaním tejto procedúry dostane Alica postupnosť úsekov s počtami políčok, ktoré neprevyšujú postupne čísla 35, 17, 7, 3 a 1, takže Alica hru ukončí najneskôr piatym kolom.

---

2 Nech n je celé číslo, kde $n \geq 3$, a $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú dĺžky strán ľubovoľného n-uholníka. Dokážte nerovnosť

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n > \sqrt{2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}.$$

(Jaroslav Švrček)

Riešenie 1:

Keďže $a_1, \dots, a_n$ sú dĺžky strán n-uholníka, platia zrejmé nerovnosti

$$\begin{gathered} a_2 + a_3 + \cdots + a_n > a_1, \\ a_1 + a_3 + \cdots + a_n > a_2, \\ \vdots \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} > a_n. \end{gathered}$$

V prvej nerovnosti pripočítame k obom stranám a_1 a potom obe strany vynásobíme kladným číslom a_1. Podobne v druhej nerovnosti pripočítame k obom stranám a_2 a potom ich obe vynásobíme a_2 a tak ďalej. Dostaneme tak nerovnosti

$$\begin{gathered} a_1(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) > 2a_1^2, \\ a_2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) > 2a_2^2, \\ \vdots \\ a_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) > 2a_n^2. \end{gathered}$$

Ak sčítame všetkých týchto n nerovností, dostaneme

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) > 2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

Po odmocnení oboch (kladných) strán poslednej nerovnosti už získame nerovnosť, ktorú sme mali dokázať.

Riešenie 2:

Keďže v danej nerovnosti na označení dĺžok strán nezáleží, môžeme predpokladať, že a_n je z nich najväčšia. Z platnej nerovnosti $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} > a_n$ potom dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \sqrt{((a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} \\ &> \sqrt{(a_n + a_n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = \sqrt{2a_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} \\ &= \sqrt{2(a_n a_1 + a_n a_2 + \cdots + a_n a_n)} \geq \sqrt{2(a_1 a_1 + a_2 a_2 + \cdots + a_n a_n)} = \sqrt{2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}. \end{aligned}$$

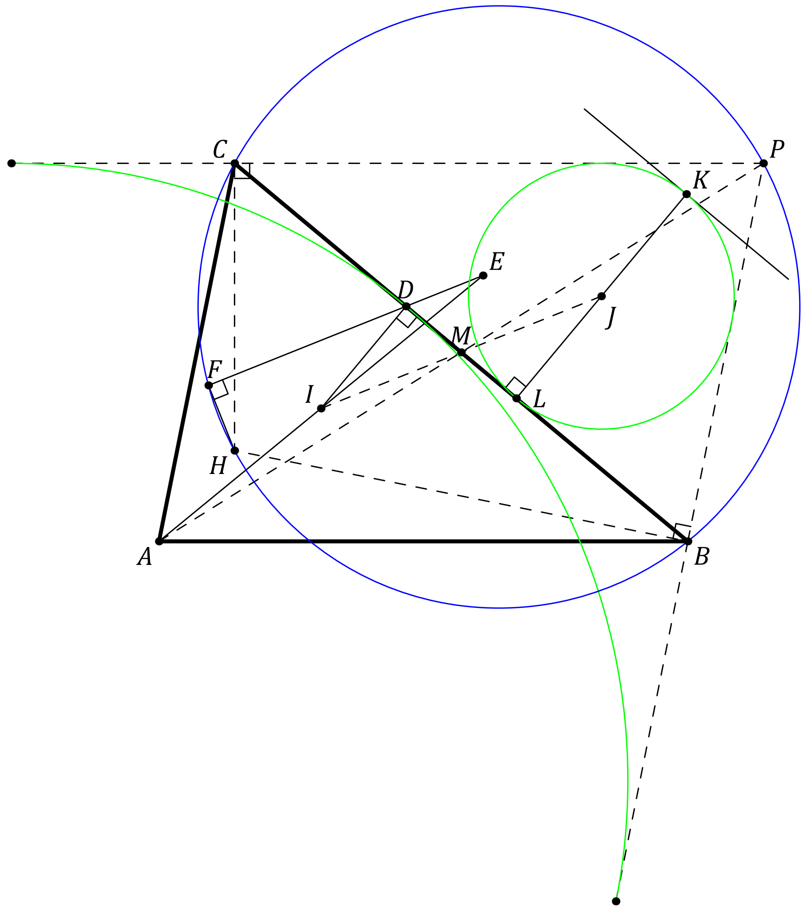
---

3 V ostrouhlom trojuholníku ABC označme H priesečník jeho výšok a I stred kružnice do neho vpísanej. Nech D je kolmým priemetom bodu I na priamku BC a E je obrazom bodu A v súmernosti so stredom I. Ďalej nech F je kolmým priemetom bodu H na priamku ED. Dokážte, že body B, H, F a C ležia na jednej kružnici.

(Patrik Bak)

Riešenie:

Doplňme trojuholník ABC na rovnobežník $ABPC$. Keďže platí $HB \perp AC \parallel BP$, je uhol HBP pravý. Podobne z $HC \perp AB \parallel CP$ vyplýva, že uhol HCP je tiež pravý. Oba body B a C preto ležia na Tálesovej kružnici s priemerom HP.



Zrejme sa ďalej stačí zaoberať prípadom, keď platí $H \neq F$. Vysvetlime, prečo potom stačí ukázať, že *body D, E, P ležia na jednej priamke*. Vtedy totiž na tejto priamke leží aj bod F, takže uhol HFP je pravý, a teda jeho vrchol F leží (spolu s bodmi B, C a H) na kružnici s priemerom HP.

Nech M je stred úsečky BC. V stredovej súmernosti so stredom v bode M označme L obraz bodu D a J obraz bodu I. Z tejto súmernosti vyplýva, že J je stredom kružnice vpísanej trojuholníku BCP a L je bodom jej dotyku so stranou BC. Nech KL je priemer tejto kružnice. Bod J je tak stredom úsečky KL.

Je známe, že D je bodom dotyku kružnice zvonka pripísanej strane BC trojuholníka BCP. (Súmerná združenosť bodu dotyku pripísanej kružnice s bodom dotyku vpísanej kružnice podľa stredu dotyčnej strany je dokázaná napríklad v riešení úlohy 63-B-S-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=1011).) Táto pripísaná kružnica je obrazom jeho kružnice vpísanej v rovnoľahlosti so stredom vo vrchole P (a koeficientom väčším ako 1). V tejto rovnoľahlosti je dotyčnica BC kružnice pripísanej obrazom tej dotyčnice kružnice vpísanej, ktorá je s ich spoločnou dotyčnicou BC rovnobežná, má však od vrcholu P menšiu vzdialenosť. Táto dotyčnica však prechádza bodom K, keďže KL je priemer kružnice vpísanej kolmý na obe dotyčnice. Preto sa v tejto rovnoľahlosti bod K zobrazí na bod D, a teda body D, K, P ležia na jednej priamke. Zostáva tak dokázať, že na tejto priamke leží aj bod E. Na to stačí ukázať, že úsečky EP a DK sú rovnobežné. To sú však strany postupne trojuholníkov AEP a LDK so strednými priečkami postupne IM a MJ, pre ktoré platí $IM \parallel EP$ a $MJ \parallel DK$. Odtiaľ už vyplýva požadovaný vzťah $EP \parallel DK$, pretože M je stredom úsečky IJ.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh 2. dňa celoštátneho kola kategórie A

4 Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť kladných celých čísel taká, že ak $n \geq 0$, tak

$$a_{n+2} = a_0a_1 + a_1a_2 + \cdots + a_na_{n+1} - 1.$$

a) Dokážte, že niektoré prvočíslo je deliteľom nekonečne veľa členov tejto postupnosti.

b) Dokážte, že takých prvočísel je nekonečne veľa.

(Tomáš Bárta)

Riešenie:

Všimnime si, že ak $n \geq 0$, tak platí

$$a_{n+3} = (a_0a_1 + a_1a_2 + \cdots + a_na_{n+1}) + a_{n+1}a_{n+2} - 1$$
$$= (a_{n+2} + 1) + a_{n+1}a_{n+2} - 1 = a_{n+2} + a_{n+1}a_{n+2} = a_{n+2}(a_{n+1} + 1),$$

a teda $a_{n+2} \mid a_{n+3}$. Matematickou indukciou preto ľahko dokážeme, že ak $n \geq m \geq 2$, tak a_n je deliteľné a_m.

a) Keďže všetky členy a_i sú kladné celé čísla, platí

$$a_4 = a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 - 1 \geq 1 + 1 + 1 - 1 = 2.$$

Číslo a_4 je teda deliteľné aspoň jedným prvočíslom. Podľa úvodného odseku je každé a_n také, že $n \geq 4$, deliteľné číslom a_4, a teda je deliteľné aj týmto prvočíslom.

b) Tvrdenie dokážeme sporom: Nech je množina všetkých prvočísel, ktoré sú deliteľmi nekonečne mnohých členov postupnosti, konečná. Ako vieme z časti a), je neprázdna. Označme ju P, platí teda $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ pre vhodné kladné k. Zrejme pre každé i z $\{1, 2, \dots, k\}$ existuje také n_i, že $n_i \geq 2$ a a_{n_i} je deliteľné p_i. Nech $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, potom $N \geq 2$ a podľa úvodného odseku je číslo a_N deliteľné všetkými číslami a_{n_1}, ..., a_{n_k}, a teda i všetkými prvočíslami p_1, ..., p_k. Kladné celé číslo $a_N + 1$, ktoré je väčšie než 1, potom nie je deliteľné žiadnym prvočíslom z P, musí teda existovať prvočíslo q nepatriace do P také, že $q \mid a_N + 1$. Toto prvočíslo q je potom tiež deliteľom čísla $a_{N+1}(a_N + 1)$ čiže a_{N+2}, teda podľa úvodného odseku platí $q \mid a_n$ pre každé n také, že $n \geq N + 2$. Preto $q \in P$, čo je však spor.

Poznámka:

Z riešenia časti a) vieme, že každé prvočíslo, ktoré delí niektorý člen postupnosti počnúc a_2, delí aj všetky nasledujúce členy. Stačí teda dokázať, že existuje nekonečne veľa prvočísel, ktoré delia aspoň jeden člen danej postupnosti. Tento poznatok je dôsledkom silnejšieho tvrdenia, že *pre každé n je číslo a_{2n+4} deliteľné aspoň n rôznymi prvočíslami*. Dôkaz tohto tvrdenia tu uvádzať nebudeme.

---

5 V trojuholníku ABC označme M, N, P postupne stredy strán BC, CA, AB a G jeho ťažisko. Nech kružnica opísaná trojuholníku BGP pretína priamku MP v bode K rôznom od P a kružnica opísaná trojuholníku CGN pretína priamku MN v bode L rôznom od N. Dokážte, že $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$.

(Josef Tkadlec)

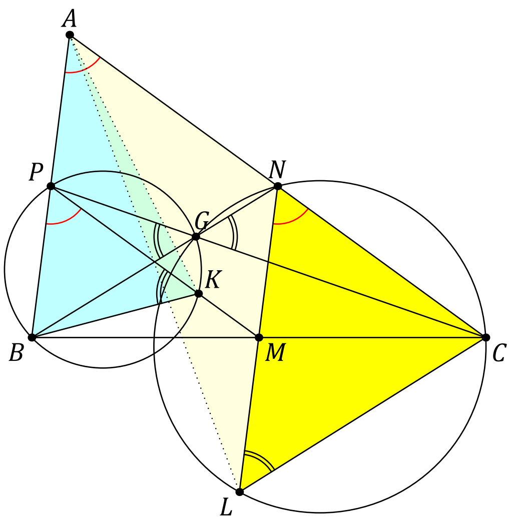
Riešenie:

Stredná priečka MP pretína ťažnicu BN medzi bodmi B a G, takže bod K leží na polpriamke PM a $BKGP$ je tetivový štvoruholník. Podobne bod L leží na polpriamke NM a $CLGN$ je tetivový štvoruholník. Vzhľadom na vzťahy $MP \parallel CA$ a $MN \parallel BA$ tak máme

$$|\sphericalangle BPK| = |\sphericalangle BPM| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle MNC| = |\sphericalangle LNC|,$$

zatiaľ čo z oboch tetivových štvoruholníkov vyplýva

$$|\sphericalangle BKP| = |\sphericalangle BGP| = |\sphericalangle NGC| = |\sphericalangle NLC|.$$



Trojuholníky BPK a CNL sú preto podľa vety *uu* podobné. Vďaka tomu sú podobné aj trojuholníky ABK a ACL, a to podľa vety *sus*, lebo

$$|\sphericalangle ABK| = |\sphericalangle PBK| = |\sphericalangle NCL| = |\sphericalangle ACL|$$

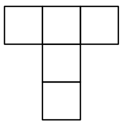
a

$$\frac{|AB|}{|BK|} = 2 \cdot \frac{|PB|}{|BK|} = 2 \cdot \frac{|NC|}{|CL|} = \frac{|AC|}{|CL|}.$$

Tým je rovnosť $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$ dokázaná.

---

6 Nech n je kladné celé číslo, kde $n \geq 3$. Uvažujme štvorčekový papier s rozmermi $n \times n$, ktorého jednotlivé štvorčeky môžu mať buď bielu, alebo čiernu farbu. V každom kroku zmeníme farby piatich štvorčekov, ktoré tvoria útvar



v ľubovoľnom natočení. Na začiatku sú všetky štvorčeky biele. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dosiahnuť to, že všetky štvorčeky budú čierne.

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie:

Dokážeme, že prefarbenie (t. j. zmena farby štvorčeka z bielej na čiernu a naopak) všetkých n^2 bielych štvorčekov je po určitom počte krokov možné práve vtedy, keď platí $n > 3$ a zároveň je číslo n deliteľné 2 alebo 3.

Ukážme najprv, že ak $n = 3$, tak požadované prefarbenie neexistuje:

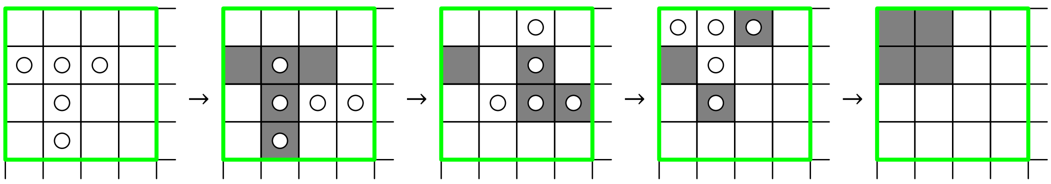
- Uvažujme takéto štvorčeky A, B, C:

	B	
	A	C

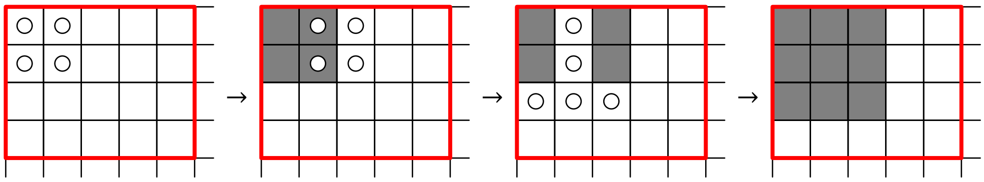
  Uvedomme si, že v každom kroku sa prefarbí štvorček A a práve jeden zo štvorčekov B alebo C. Ak by sme po určitom počte krokov všetkých 9 štvorčekov prefarbili, počty prefarbení štvorčekov B a C by boli nepárne, teda počet prefarbení štvorčeka A by bol párny, a preto by sa vo výsledku štvorček A neprefarbil, čo je spor.

Ďalej už preto budeme predpokladať, že platí $n \geq 4$.

- Ak je n deliteľné 2, využijeme opakovane postup podľa nasledujúceho obrázku, pri ktorom štyrmi krokmi v zeleno vyznačenom štvorci 4×4 prefarbíme práve 4 štvorčeky jedného štvorca 2×2. Papier $n \times n$ rozdelíme na $(n/2)^2$ štvorcov 2×2 a postupne v každom z nich prefarbíme štvorčeky uvedeným postupom. Pri tých štvorcoch, ktoré sú na hranici papiera, budeme konštrukciu z obrázku vhodne otáčať, aby potrebný štvorec 4×4 ležal celý vnútri papiera.



- Ak je n deliteľné 3, využijeme opakovane postup podľa nasledujúceho obrázku, ktorý najskôr využíva dvakrát konštrukciu z predchádzajúceho bodu. Takto v červeno vyznačenom obdĺžniku 5×4 prefarbíme práve 9 štvorčekov jedného štvorca 3×3. Postup podobne ako v 1. časti uplatníme na jednotlivé štvorce 3×3, na ktoré celý papier rozdelíme, pričom pre hraničné štvorce konštrukciu z obrázku opäť vhodne otáčame, aby potrebný obdĺžnik 5×4 ležal celý vnútri papiera.



- Teraz budeme predpokladať, že n nie je deliteľné 2 ani 3. Štvorčeky papiera $n \times n$ v každom riadku označíme postupne číslami 0, 1, 2, 0, …:

0	1	2	0	1	⋯
0	1	2	0	1	⋯
0	1	2	0	1	⋯
0	1	2	0	1	⋯
0	1	2	0	1	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Nech a_i, kde $i \in \{0, 1, 2\}$, označuje počet čierno zafarbených štvorčekov s číslom i. Všimnime si, že parita každého z troch čísel a_i sa po každom kroku zmení, lebo v ňom meníme farbu niektorých štvorčekov iba v troch susedných stĺpcoch, a to v každom z nich pri nepárnom počte štvorčekov. Keďže na začiatku máme $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, po ľubovoľnom počte krokov budú čísla a_0, a_1, a_2 buď všetky párne, alebo všetky nepárne.

Vďaka predpokladu, že 3 nedelí n, je štvorčekov s číslom 0 o n (celý jeden stĺpec) viac ako štvorčekov s číslom 2. Keby po niektorom počte krokov boli všetky štvorčeky zafarbené čierno, platilo by potom $a_0 - a_2 = n$, čo by vzhľadom na predpoklad, že 2 nedelí n, znamenalo, že čísla a_0 a a_2 majú rôznu paritu. To však odporuje záveru z predchádzajúceho odseku. Po žiadnom počte krokov sa nám tak nepodarí zadanú úlohu splniť.