MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9

1 Z prieskumu v našej škole vyplynulo, že

- všetky deti, ktoré majú rady matematiku, riešia Matematickú olympiádu,
- 90 % detí, ktoré nemajú rady matematiku, Matematickú olympiádu nerieši,
- Matematickú olympiádu rieši 46 % detí.

Koľko percent detí z našej školy má rado matematiku?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Matematickú olympiádu (MO) riešia všetky deti, ktoré majú rady matematiku, ale iba desatina tých, ktoré matematiku rady nemajú.

Dajme tomu, že x % detí má rado matematiku, a teda rieši MO. Potom $(46 - x)$ % detí matematiku rado nemá a tiež rieši MO. Všetkých detí, ktoré matematiku rady nemajú, je desaťkrát viac, t. j. $10(46 - x)$ %. Platí teda:

$$x + 10(46 - x) = 100,$$
$$x + (460 - 10x) = 100,$$
$$460 - 9x = 100,$$
$$360 = 9x,$$
$$40 = x,$$
$$x = 40.$$

Detí, ktoré majú rady matematiku, je 40 %.

Poznámka:

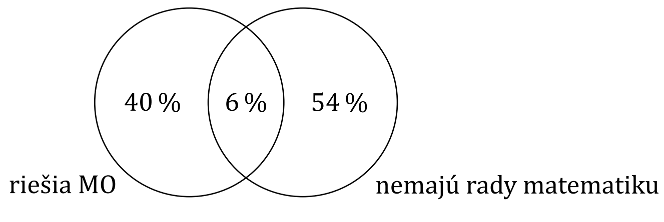
Iné značenie vedie k iným úpravám. Dajme tomu, že y % detí nemá rado matematiku. Potom $\frac{9}{10}y$ % detí nerieši MO. To zodpovedá 54 % detí (lebo $100 - 46 = 54$). Teda platí:

$$\frac{9}{10}y = 54,$$

odkiaľ jednoduchými úpravami dostávame $y = 60$.

Poznámka:

Uvedené vzťahy je možné znázorniť pomocou Vennovho diagramu takto:



Hodnotenie:

- 2 body za pomocné značenia a čiastkové pozorovania;
- 2 body za výsledok;
- 2 body za kvalitu komentára.

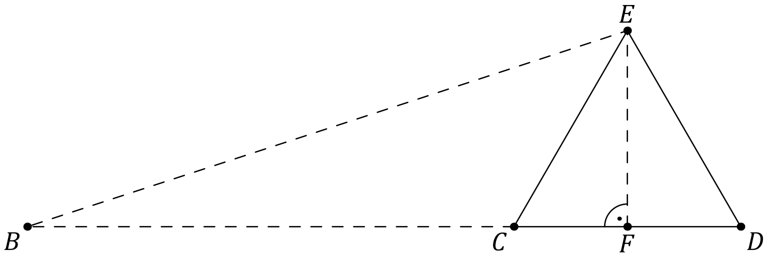
2 Je daný bod B a rovnostranný trojuholník so stranami dĺžky 1 cm. Vzdialenosti bodu B od dvoch vrcholov tohto trojuholníka sú 2 cm a 3 cm.

Vypočítajte vzdialenosť bodu B od tretieho vrcholu tohto trojuholníka.

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Vrcholy trojuholníka označíme C, D, E a vzdialenosti zo zadania priradíme (bez ujmy na všeobecnosti) veľkostiam úsečiek BC a BD. Keďže $1\text{ cm} + 2\text{ cm} = 3\text{ cm}$, bod B leží na priamke CD. Vzdialenosť B od tretieho vrchola E je preponou vyznačeného pravouhlého trojuholníka BFE:



Úsečka EF je výškou rovnostranného trojuholníka CDE, teda

$$|EF| = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ cm}.$$

To je známy vzťah, ktorý je možné nájsť v tabuľkách, prípadne vypočítať pomocou Pytagorovej vety v trojuholníku CFE. Bod F je stredom úsečky CD, teda

$$|BF| = |BC| + |CF| = \frac{5}{2}\text{ cm}.$$

Podľa Pytagorovej vety v trojuholníku BFE platí

$$|BE|^2 = |EF|^2 + |FE|^2 = \left(\frac{5}{2}\text{ cm}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ cm}\right)^2 = \frac{25}{4}\text{ cm}^2 + \frac{3}{4}\text{ cm}^2 = \frac{28}{4}\text{ cm}^2 = 7\text{ cm}^2.$$

z čoho

$$|BE| = \sqrt{7}\text{ cm}.$$

Vzdialenosť bodu B od tretieho vrcholu trojuholníka je $\sqrt{7}$ cm.

Hodnotenie:

- 1 bod za zistenie, že B leží na priamke CD;
- 3 body za dopočítanie $|BE|$;
- 2 body za kvalitu komentára.

---

3 Tabuľka čísel má 4 stĺpce a 99 riadkov a je vytvorená nasledujúcim spôsobom: Počnúc druhým riadkom je štvorica čísel v každom riadku určená číslami z riadku predchádzajúceho, a to postupne ako súčet prvého a druhého čísla, rozdiel prvého a druhého čísla, súčet tretieho a štvrtého čísla a rozdiel tretieho a štvrtého čísla.

a) Aký je súčet čísel v 3. riadku, ak je súčet čísel v 1. riadku rovný 0?

b) Aký je súčet čísel v 25. riadku, ak je súčet čísel v 1. riadku rovný 1?

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Celá tabuľka je určená číslami na prvom riadku. Prvých niekoľko riadkov tabuľky vyzerá takto:

1.	a	b	c	d
2.	$a+b$	$a-b$	$c+d$	$c-d$
3.	$2a$	$2b$	$2c$	$2d$
4.	$2(a+b)$	$2(a-b)$	$2(c+d)$	$2(c-d)$
5.	$4a$	$4b$	$4c$	$4d$
6.	$4(a+b)$	$4(a-b)$	$4(c+d)$	$4(c-d)$
7.	$8a$	$8b$	$8c$	$8d$
8.	$8(a+b)$	$8(a-b)$	$8(c+d)$	$8(c-d)$
9.	$16a$	$16b$	$16c$	$16d$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

a) Súčet čísel v 3. riadku je dvojnásobkom súčtu čísel v 1. riadku. Ak je súčet v 1. riadku rovný 0, tak súčet v 3. riadku je tiež rovný 0.

b) Súčty čísel na ďalších nepárnych riadkoch sa postupne zdvojnásobujú: Súčet v 5. riadku je 4-násobkom súčtu v 1. riadku ($2 \cdot 2 = 4 = 2^2$), súčet v 7. riadku je 8-násobkom súčtu v 1. riadku ($2 \cdot 4 = 8 = 2^3$), súčet v 9. riadku je 16-násobkom súčtu v 1. riadku ($2 \cdot 8 = 16 = 2^4$) a tak ďalej.

   Predchádzajúce pozorovania sú pri tomto značení zovšeobecnené takto: Ak $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, tak súčet v $(2i + 1)$. riadku je 2^i-násobkom súčtu v 1. riadku.

   Keďže $25 = 2 \cdot 12 + 1$, súčet v 25. riadku je rovný 2^{12}-násobku prvého riadku. Ak je súčet prvého riadku rovný 1, je súčet v 25. riadku rovný 2^{12} čiže 4096.

Poznámka:

Aj pre párne riadky platí, že sa ich súčty postupne zdvojnásobujú. Ak $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, tak súčet v $(2i)$. riadku je 2^i-násobkom súčtu čísel a a c v 1. riadku.

Hodnotenie:

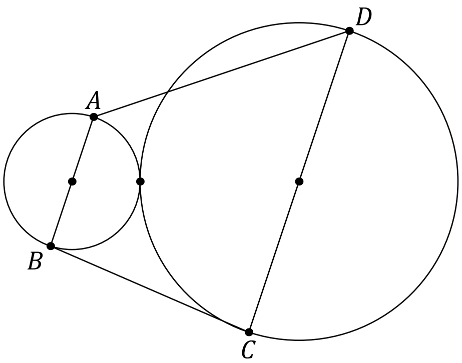
- 1 bod za prípravné pozorovania (aspoň tri riadky tabuľky);
- 1 bod za odpoveď na otázku a);
- 2 body za odpoveď na otázku b);
- 2 body za kvalitu komentára.

Za správnu odpoveď na otázku b) považujte aj akýkoľvek iný výraz so správnou hodnotou, napríklad 8^4, 64^2 a podobne.

---

4 Sú dané dve kružnice s vonkajším dotykom. Úsečka AB je priemerom jednej kružnice a má veľkosť 6 cm, úsečka CD je priemerom druhej kružnice a má veľkosť 14 cm. Štvoruholník $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD.

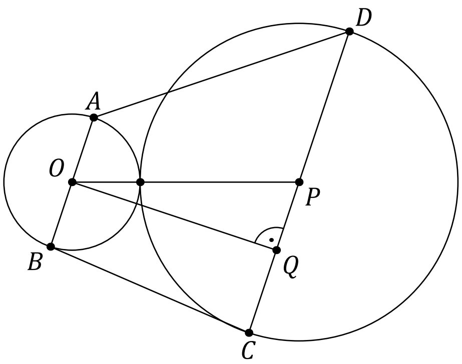
Zistite, aký najväčší obsah môže mať lichobežník $ABCD$, a zdôvodnite, prečo nemôže byť väčší.



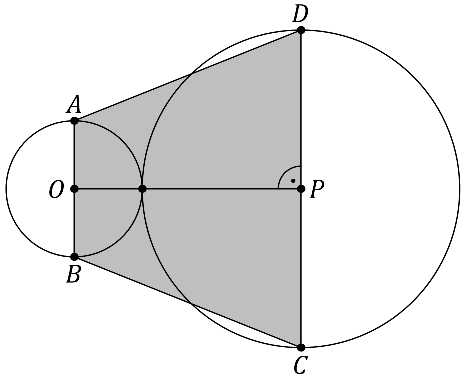
(Karel Pazourek)

Riešenie:

Lichobežníkov s uvedenými vlastnosťami je nekonečne veľa. Všetky majú rovnaké veľkosti základní, menia sa ich výšky. Táto výška však nemôže byť väčšia ako vzdialenosť stredov kružníc:



Označme stredy kružníc O a P a pätu výšky z bodu O označme Q. Ak body P a Q nesplývajú, tak výška OQ je odvesnou pravouhlého trojuholníka OQP, a preto je menšia ako jeho prepona OP. Teda lichobežník s najväčším obsahom je taký, ktorého základne sú kolmé na spojnicu stredov kružníc:



Základne lichobežníka majú dĺžky 6 cm a 14 cm, veľkosť výšky OP je $\frac{1}{2}(6\text{ cm} + 14\text{ cm})$ čiže 10 cm. Označme S obsah tohto lichobežníka, a teda najväčší možný obsah. Potom

$$S = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot |OP| = \frac{1}{2} \cdot (6\text{ cm} + 14\text{ cm}) \cdot 10\text{ cm} = \frac{1}{2} \cdot 20\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = \frac{1}{2} \cdot 200\text{ cm}^2 = 100\text{ cm}^2.$$

Hodnotenie:

- 2 body za uvedomenie, že základne sa nemenia a mení sa len výška;
- 2 body za obsah najväčšieho lichobežníka;
- 2 body za zdôvodnenie maxima výšky.

V zdôvodnení, že úsečka OP je väčšia ako OQ, stačí argumentovať tým, že oproti väčšiemu vnútornému uhlu trojuholníka je väčšia strana.