MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7

1 Priemerný vek dedka, babičky a ich piatich vnúčat je 26 rokov. Priemerný vek samotných vnúčat je 7 rokov. Babička je o rok mladšia ako dedko. Koľko rokov má babička?

(Libuše Hozová)

Nápad:

Koľko rokov majú všetky vnúčatá dohromady?

Riešenie 1:

Vnúčatá dohromady majú 35 rokov (lebo $5 \cdot 7 = 35$). Dedko, babička a vnúčatá spolu majú 182 rokov (lebo $7 \cdot 26 = 182$). Dedo a babička dohromady teda majú 147 rokov (lebo $182 - 35 = 147$).

Priemerný vek babičky a dedka je 73,5 roka (lebo $147 : 2 = 73{,}5$) a babička je o rok mladšia ako dedko. Teda babička má 73 rokov a dedko 74 rokov ($73{,}5 \pm 0{,}5$).

Aby bolo riešenie úplné, treba ešte ukázať, že situácia zo zadania naozaj môže nastať. Na to stačí predpokladať, že všetky vnúčatá majú rovnako po 7 rokov.

Riešenie 2:

Ak vek babičky označíme b a vek dedka d, tak informácie zo zadania je možné zapísať ako

$$(d + b + 5 \cdot 7) : 7 = 26,$$
$$d = b + 1.$$

Z prvého vzťahu dostávame

$$d + b = 26 \cdot 7 - 5 \cdot 7 = 21 \cdot 7 = 147.$$

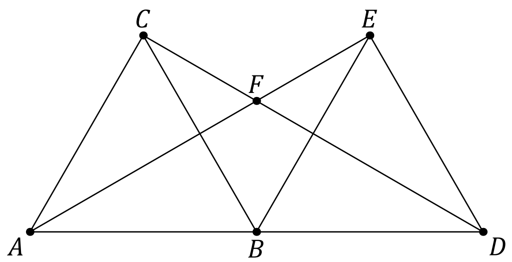
Dosadením druhého vzťahu dostávame $2b + 1 = 147$, teda

$$b = (147 - 1) : 2 = 73.$$

Babka má teda 73 rokov.

Treba ešte ukázať, že situácia zo zadania naozaj môže nastať. Na to stačí predpokladať, že dedko má 74 rokov a všetky vnúčatá majú zhodne 7 rokov.

2 Sú dané dva zhodné rovnostranné trojuholníky ABC a BDE tak, že body A, B, D ležia na jednej priamke a body C, E ležia v rovnakej polrovine vymedzenej priamkou AD. Priesečník CD a AE je označený F. Určte veľkosť uhla AFD.



(Iveta Jančigová)

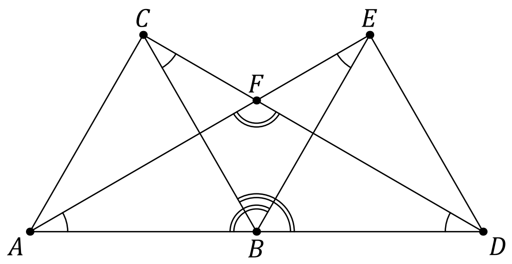
Nápad:

Oplatí sa zamerať na skupiny navzájom zhodných uhlov.

Riešenie 1:

Vnútorný uhol pri vrchole A, resp. D v trojuholníku AFD je tiež vnútorným uhlom trojuholníka ABE, resp. DBC. Trojuholníky ABE a DBC sú podľa predpokladov rovnoramenné a navzájom zhodné. Teda aj vnútorné uhly pri vrcholoch A a D sú zhodné.

Preto je trojuholník AFD rovnoramenný a uhol AFD je zhodný s uhlom ABE, resp. DBC. Tento uhol je vonkajším uhlom rovnostranného trojuholníka, teda má veľkosť 120°.



Riešenie 2:

Vnútorný uhol v rovnostrannom trojuholníku má veľkosť 60°. Pri otočení okolo bodu B o tento uhol v smere hodinových ručičiek sa bod A zobrazí na C a bod E sa zobrazí na D. Teda priamka AE sa zobrazí na priamku CD.

Uhol AFC, resp. EFD má preto veľkosť 60°. Hľadaný uhol AFD dopĺňa tento uhol do priameho uhla, teda má veľkosť 120°.

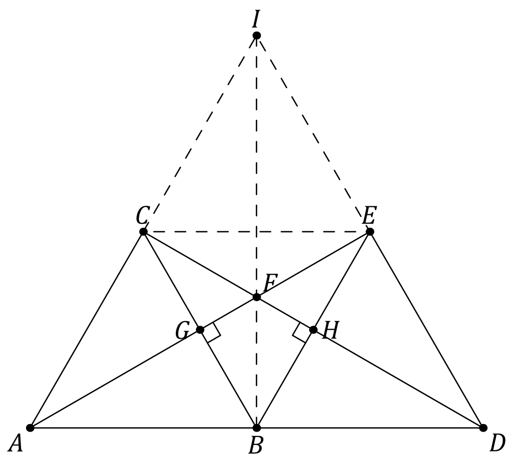
Poznámka:

Z predpokladov vyplýva rad ďalších vzťahov, ktoré môžu viesť k alternatívnym zdôvodneniam predchádzajúceho výsledku. Stručne uvádzame niekoľko postrehov (pre dodatočné značenia viď obrázok nižšie):

Štvoruholník $ABEC$, resp. $BDEC$ je kosoštvorcom. Uhlopriečky v kosoštvorci delia príslušné vnútorné uhly na polovice a sú navzájom kolmé.

- Z prvého faktu vyplýva, že uhol BAE, resp. BDC má veľkosť 30°. Uhol AFD, čo je zvyšný vnútorný uhol v trojuholníku AFD, má preto veľkosť 120° (lebo súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180°).
- Z druhého faktu poznáme vnútorné uhly pri vrcholoch G a H v štvoruholníku $BHFG$. Vnútorný uhol pri vrchole B má veľkosť 60°. Uhol AFD, čo je zvyšný vnútorný uhol v štvoruholníku $BHFG$, má preto veľkosť 120° (lebo súčet vnútorných uhlov štvoruholníka je 360°).

Zadaný útvar je časťou rovnostranného trojuholníka ADI, kde body B, C, E sú stredy jeho strán. Úsečky AE, CD a IB sú výškami a súčasne osami súmernosti tohto trojuholníka. Trojuholníky AFD, DFI a IFA sú navzájom zhodné a spolu tvoria trojuholník ADI. Ich vnútorné uhly pri vrchole F preto majú veľkosť 120° (tretina plného uhla).



---

3 *Obkročné číslo* je také prirodzené číslo, v ktorého zápise

- je každá nenulová číslica použitá práve dvakrát,
- medzi dvoma rovnakými nenulovými číslicami sa nachádza práve toľko núl, aká je hodnota týchto číslic.

(Obkročné čísla sú napríklad 40001041 alebo 300103100.)

Zistite, koľko existuje sedemciferných obkročných čísel, v ktorých zápise sa vyskytujú práve jednotky, dvojky a nuly.

(Matúš Papšo)

Nápad:

Koľkokrát sú použité nuly v každom z hľadaných čísel?

Riešenie:

Hľadané čísla sú sedemmiestne a obsahujú práve dve jednotky a práve dve dvojky, teda obsahujú práve tri nuly.

Tieto nuly oddeľujú v zápise čísla štyri časti, v ktorých sa môžu nachádzať jednotky a dvojky:

… 0 … 0 … 0 …

Niektoré časti môžu zostať prázdne, niektoré nuly môžu byť bezprostredne vedľa seba. Jednotky môžu byť jedine v susedných častiach (je teda medzi nimi jedna nula), medzi časťami s dvojkami musí byť jedna ďalšia časť (sú teda medzi nimi dve nuly). Všetky čísla s týmito vlastnosťami, ktoré nezačínajú nulou, sú v nasledujúcej tabuľke:

	$\overset{1}{\dots}$ 0 $\overset{1}{\dots}$ 0 … 0 …	… 0 $\overset{1}{\dots}$ 0 $\overset{1}{\dots}$ 0 …	… 0 … 0 $\overset{1}{\dots}$ 0 $\overset{1}{\dots}$
$\overset{2}{\dots}$ 0 … 0 $\overset{2}{\dots}$ 0 …	1201020, 2101020	2010120, 2010210	2001201, 2002101
… 0 $\overset{2}{\dots}$ 0 … 0 $\overset{2}{\dots}$	1012002, 1021002	–	–

Obkročných čísel s uvedenými vlastnosťami je teda 8.

Poznámka:

Súčasťou úlohy je aj popis postupu vedúceho k správnej odpovedi. V tomto prípade ide o nejaký systém, aby bolo zrejmé, že sa na nič nezabudlo. Výpočet možností bez primeraného zdôvodnenia nemožno hodnotiť najlepším stupňom.

---

4 Jarko mal napísanú postupnosť slabík:

`ZU ZA NA NE LA LU CI SA MU EL`

Písmená chcel nahradiť číslicami od 0 do 9 tak, aby rôznym písmenám zodpovedali rôzne číslice a aby (v danom poradí) vznikla rastúca postupnosť dvojciferných čísel. Zistite, či sa to dá a ako, alebo vysvetlite, prečo to možné nie je.

(Jaroslav Zhouf)

Nápad:

Jarko sa najskôr sústredil na opakujúce sa písmená.

Riešenie:

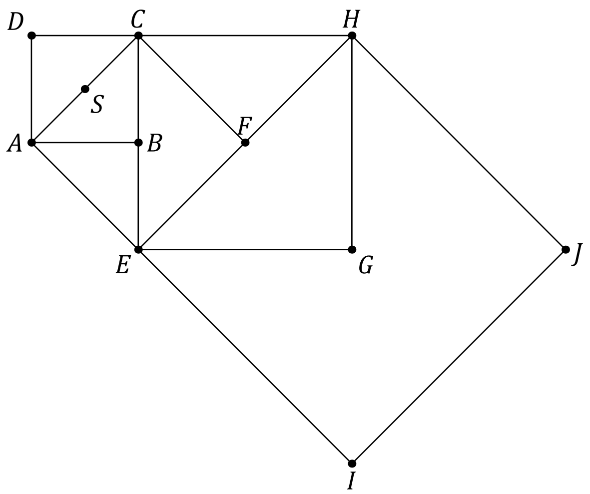
Vo dvojici za sebou stojacich slabík ZU a ZA by musela byť číslica nahrádzajúca písmeno U menšia ako číslica nahrádzajúca písmeno ZA.

Vo dvojici za sebou stojacich slabík LA a LU by musela byť číslica nahrádzajúca písmeno A menšia ako číslica nahrádzajúca písmeno U.

Tieto dve požiadavky sú nezlučiteľné, a preto Jarkova úloha nemá riešenie.

---

5 Na obrázku sú znázornené štvorce $ABCD$, $EFCA$, $GHCE$ a $IJHE$. Body S, B, F a G sú postupne stredy týchto štvorcov. Úsečka AC je dlhá 1 cm. Určte obsah trojuholníka IJS.



(Eva Semerádová)

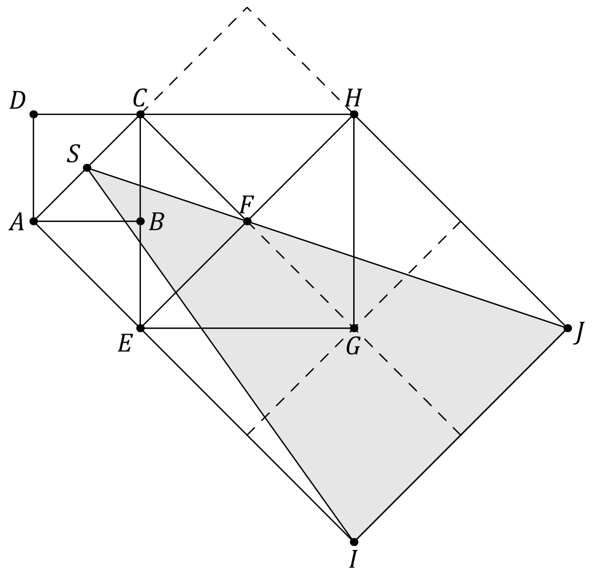
Nápad:

Obsah trojuholníka je polovicou obsahu nejakého obdĺžnika.

Riešenie:

Obsah trojuholníka IJS je rovný polovici obsahu obdĺžnika so stranami IJ a IA. Strana IJ je stranou štvorca $IJHE$, strana IA je súčtom strany štvorca $IJHE$ a strany štvorca $EFCA$.

Štvorec $IJHE$ má dvojnásobnú stranu vzhľadom k štvorcu $EFCA$, ktorá meria 1 cm. Teda strana IJ meria 2 cm a strana IA meria 3 cm. Obsah trojuholníka IJS je teda rovný $\frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm}$ čiže $3\,\text{cm}^2$.



Poznámka:

Pri jemnejšom delení naznačenej štvorcovej siete je možné k tomu istému výsledku dospieť názorným počítaním štvorčekov, resp. trojuholníčkov.

---

6 Eva si myslela dve prirodzené čísla. Tieto čísla najprv správne sčítala, potom od seba správne odčítala. V obidvoch prípadoch dostala dvojciferný výsledok. Súčin takto vzniknutých dvojciferných čísel bol 645. Ktoré čísla si Eva myslela?

(Erika Novotná)

Nápad:

Každé prirodzené číslo má konečný počet deliteľov.

Riešenie 1:

Číslo 645 je možné zapísať ako súčin dvoch prirodzených čísel nasledujúcimi spôsobmi: $1 \cdot 645$, $5 \cdot 129$, $15 \cdot 43$, $3 \cdot 215$. Súčinitele sú dvojciferné iba v predposlednom prípade, teda súčet Eviných čísel bol 43 a rozdiel 15.

Čísla 43 a 15 vznikli tak, že k väčšiemu z Eviných čísel sa raz pripočítalo a raz sa od neho odpočítalo to menšie. Teda väčšie Evino číslo je presne medzi (teda je priemerom) 43 a 15 a menšie Evino číslo je polovicou rozdielu medzi 43 a 15. Eva si teda myslela čísla $\frac{43+15}{2}$ čiže 29 a $\frac{43-15}{2}$ čiže 14.

Riešenie 2:

Súčet a rozdiel Eviných čísel zistíme rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Ak väčšie z Eviných čísel označíme v a menšie m, tak predchádzajúce vzťahy môžeme zapísať ako

$$v + m = 43,$$
$$v - m = 15.$$

Odtiaľ máme

$$2v = (v + m) + (v - m) = 43 + 15 = 58,$$
$$2m = (v + m) - (v - m) = 43 - 15 = 28,$$

a teda

$$v = \frac{58}{2} = 29,$$
$$m = \frac{28}{2} = 14.$$

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že tieto čísla vyhovujú.
