MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8

1 Sú dané tri navzájom rôzne čísla. Priemer priemeru dvoch menších čísel a priemeru dvoch väčších čísel je rovný priemeru všetkých troch čísel. Priemer najmenšieho a najväčšieho čísla je 2022. Určte súčet týchto troch čísel.

(Karel Pazourek)

Nápad:

Vyjadrite jedno z čísel pomocou zvyšných dvoch.

Riešenie:

Označme tri čísla zo zadania a, b, c, pričom $a < b < c$. Prvá podmienka znamená

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Túto rovnosť môžeme upraviť nasledovne:

$$\frac{a+2b+c}{4} = \frac{a+b+c}{3},$$

$$3a + 6b + 3c = 4a + 4b + 4c,$$

$$2b = a + c,$$

$$b = \frac{a+c}{2} = 2022.$$

Z uvedeného plynie, že

$$a + b + c = b + 2b = 6066.$$

Aby však riešenie bolo úplné, treba ešte ukázať, že situácia zo zadania môže nastať. To však ľahko docielime napríklad voľbou $a = 2020$, $b = 2022$, $c = 2024$.

2 Kosoštvorec $ABCD$ má stranu dĺžky 6 cm a výšku 4 cm. Bod E je stred strany AD, bod G je stred strany BC, bod F je priesečník úsečiek AG a BE, bod H je priesečník úsečiek CE a DG. Určte obsah štvoruholníka $EFGH$.

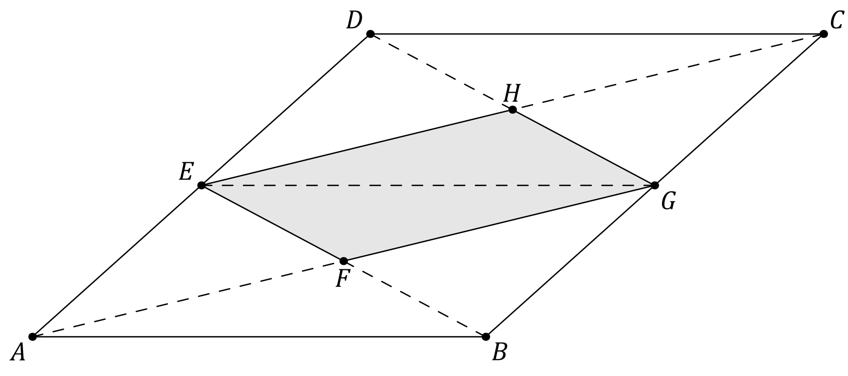
(Karel Pazourek)

Nápad:

Pomôžte si obrázkom s doplnenou úsečkou EG.

Riešenie:

Úsečka EG rozdeľuje kosoštvorec $ABCD$ na dva zhodné rovnobežníky $ABGE$ a $EGCD$ (body E a G sú stredy strán, teda úsečky AE, BG, ED, GC sú navzájom zhodné a priamky AB, EG, CD navzájom rovnobežné). Zvyšné úsečky zo zadania sú uhlopriečkami týchto rovnobežníkov a body F, H sú ich priesečníky:



Každý rovnobežník je svojimi uhlopriečkami rozdelený na štyri trojuholníky s rovnakými obsahmi (každé dva susedné trojuholníky majú zhodné strany ležiace na jednej priamke a spoločnú výšku vzhľadom k tejto priamke).

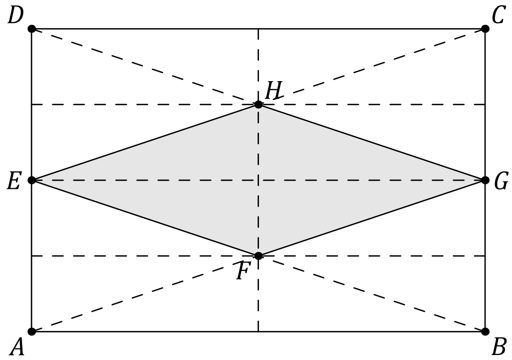
Kosoštvorec $ABCD$ je tak rozdelený na osem trojuholníkov s rovnakými obsahmi a štvoruholník $EFGH$ je tvorený dvoma z týchto ôsmich trojuholníkov. Tento štvoruholník teda zaberá dve osminy, t. j. jednu štvrtinu obsahu daného kosoštvorca.

Obsah kosoštvorca $ABCD$ je rovný $6\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}$ čiže 24 cm^2, teda

$$\mathrm{S}(EFGH) = \frac{1}{4}\mathrm{S}(ABCD) = 6\text{ cm}^2.$$

Poznámka:

V uvedenom riešení nie je podstatné, ktorá z uhlopriečok kosoštvorca je kratšia a ktorá dlhšia. Pretože sa zaujímame výhradne o obsahy, môžeme dokonca pracovať s akýmkoľvek rovnobežníkom, ktorý má rovnakú stranu a výšku ako pôvodný kosoštvorec. Preto môžeme úlohu riešiť v obdĺžniku so stranami 6 cm a 4 cm:



Dodatočné delenie pomocou rovnobežiek so stranami rozdeľuje obdĺžnik $ABCD$ na 16 zhodných trojuholníkov, z ktorých 4 tvoria štvoruholník $EFGH$. Tento štvoruholník teda zaberá $\frac{4}{16}$ čiže jednu štvrtinu obsahu obdĺžnika.

---

3 Pre postupnosť čísel začínajúcu sa

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ \ldots$$

platí, že každé číslo počnúc tretím je súčtom predchádzajúcich dvoch. Akou číslicou sa končí číslo na 2023. mieste tejto postupnosti?

(Ján Mazák)

Nápad:

Pomôžte si postupnosťou tvorenou poslednými číslicami.

Riešenie:

Posledná číslica každého čísla zodpovedá zvyšku po delení tohto čísla desiatimi. Stačí sa teda zaoberať postupnosťou zodpovedajúcich zvyškov, ktorá sa začína

$$1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, \ldots$$

t. j. postupnosťou, v ktorej každé číslo počnúc tretím je zvyškom súčtu predchádzajúcich dvoch po delení desiatimi. Táto postupnosť sa po 12 členoch opakuje, teda napr. 1., 13., 25., 145. či 2017. člen postupnosti tvoria rovnaké čísla.

Číslo 2023 po delení 12 dáva zvyšok 7. Teda 2023. člen tejto postupnosti je rovnaký ako siedmy, a to je číslo 9.

2023. číslo v danej postupnosti sa končí číslicou 9.

---

4 Cyril na mape s mierkou $1 : 50\,000$ vyznačil štvorcový pozemok a vypočítal si, že jeho strana v skutočnosti zodpovedá 1 km. Mapu zmenšil na kopírke tak, že vyznačený štvorec mal obsah o $1{,}44\text{ cm}^2$ menší ako na pôvodnej mape. Aká bola mierka mapy po zmenšení?

(Michaela Petrová)

Nápad:

Aké rozmery mal vyznačený pozemok na pôvodnej mape?

Riešenie:

Na pôvodnej mape mala strana pozemku dĺžku 2 cm (lebo $2\text{cm} \cdot 50\,000 = 100\,000\text{cm} = 1\text{ km}$). Teda obsah príslušného štvorca bol 4 cm^2.

Po zmenšení mapy bol obsah nového štvorca $2{,}56\text{cm}^2$ (lebo $4\text{ cm}^2 - 1{,}44\text{ cm}^2 = 2{,}56\text{ cm}^2$). Teda strana tohto štvorca mala dĺžku $1{,}6\ cm$ (lebo $\sqrt{2{,}56\text{ cm}^2} = 1{,}6\text{ cm}$).

Týchto 1,6 cm na mape zodpovedá stále rovnakému 1 km v skutočnosti. Mierka takto zmenšenej mapy teda bola $1{,}6 : 100\,000$ čiže $1 : 62\,500$.

---

5 Petra mala na tabuli napísané všetky prirodzené čísla od 1 do 9, každé práve raz. Dve z týchto čísel sčítala, zmazala a výsledný súčet napísala namiesto zmazaných sčítancov. Mala tak teraz napísaných osem čísel, ktoré sa jej podarilo rozdeliť do dvoch skupín s rovnakým súčinom. Určte, aký najväčší mohol byť tento súčin.

(Erika Novotná)

Nápad:

Oplatí sa zamerať na prvočísla.

Riešenie:

Na porovnanie súčinov vzniknutých skupín čísel budú užitočné prvočíselné činitele. Aby súčiny čísel v obidvoch skupinách boli rovnaké, musia byť celkové počty jednotlivých prvočiniteľov párne. Ak je počet niektorých prvočiniteľov nepárny, tak rozdelenie do skupín s rovnakým súčinom nie je možné.

Prvočísla medzi danými číslami sú iba 2, 3, 5, 7, pričom 5 a 7 sa vyskytujú práve raz. Vzhľadom na výskyt 5 a 7 stačí uvažovať tri prípady, ktoré môžu viesť k riešeniu, a tie postupne rozoberieme:

- Petra sčítala niečo s 5, aby dostala násobok 7. To mohla urobiť dvojakým spôsobom:
  - Zrátala $5 + 2$, a dostala osem čísel 1, 3, 4, 6, 7, 7, 8, 9. Túto osmicu možno rozdeliť do skupín s rovnakým súčinom:
  $$1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504.$$
  - Zrátala $5 + 9$, a dostala osem čísel 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 14. Túto osmicu možno rozdeliť do skupín s rovnakým súčinom:
  $$1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 14 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 = 336.$$
- Petra sčítala niečo so 7, aby dostala násobok 5. To mohla urobiť dvojakým spôsobom:
  - Zrátala $7+3$, a dostala osem čísel 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10. Túto osmicu nemožno rozdeliť do skupín s rovnakým súčinom, pretože 3 sa v prvočíselných rozkladoch týchto čísel vyskytuje celkovo trikrát.
  - Zrátala $7+8$, a dostala osem čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 15. Túto osmicu nemožno rozdeliť do skupín s rovnakým súčinom, pretože 3 sa v prvočíselných rozkladoch týchto čísel vyskytuje celkovo päťkrát.
- Petra sčítala $5 + 7$, a dostala osem čísel 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12. Túto osmicu nemožno rozdeliť do skupín s rovnakým súčinom, pretože 3 sa v prvočíselných rozkladoch týchto čísel vyskytuje celkom päťkrát.

Petra mohla dostať buď súčin 504, alebo 336. Najväčší možný súčin je teda 504.

Poznámka:

Rozdelenia do skupín s rovnakým súčinom v prípade a) nie sú jediné možné (napr. 1 môže byť kdekoľvek).

Poznámka:

Počet všetkých dvojíc, ktoré je možné utvoriť z daných deviatich čísel, je 36. S úvodným pozorovaním sme počet prípadov do diskusie podstatne znížili.

Poznámka:

Súčasťou úlohy je aj popis postupu vedúceho k správnej odpovedi. Nájdené súčiny bez primeraného zdôvodnenia, že iné možné nie sú, nemožno hodnotiť najlepším stupňom.

---

6 Je daný obdĺžnik $ABCD$ a body E, F tak, že trojuholníky BEC a CFD sú rovnostranné a každý z nich má s obdĺžnikom $ABCD$ spoločnú iba stranu. Zdôvodnite, že aj trojuholník AEF je rovnostranný.

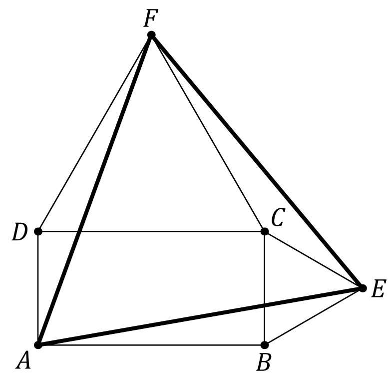
(Jaroslav Švrček)

Nápad:

Oplatí sa zamerať na skupiny zhodných objektov.

Riešenie 1:

Vzájomná poloha obdĺžnika a dvoch rovnostranných trojuholníkov je znázornená na obrázku, v ktorom sú tiež vyznačené niektoré navzájom zhodné uhly:



Rovnostrannosť trojuholníka AEF vyplýva zo vzájomnej zhodnosti trojuholníkov ABE, FCE a FDA a tú zdôvodníme nasledovne:

- Strany AB, FC a FD sú navzájom zhodné, pretože protiľahlé strany AB a CD obdĺžnika $ABCD$ sú zhodné a trojuholník CFD je rovnostranný,
- Strany BE, CE a DA sú navzájom zhodné, pretože protiľahlé strany DA a BC obdĺžnika $ABCD$ sú zhodné a trojuholník BEC je rovnostranný,
- Uhly ABE, FCE a FDA sú navzájom zhodné, pretože

$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle FDA| = 90° + 60° = 150°,$$
$$|\sphericalangle FCE| = 360° - 2 \cdot 60° - 90° = 150°.$$

Podľa vety *sus* sú trojuholníky ABE, FCE a FDA navzájom zhodné. Zhodujú sa teda aj vo zvyšných stranách, čo sú zároveň strany trojuholníka AEF. Preto je trojuholník AEF rovnostranný.

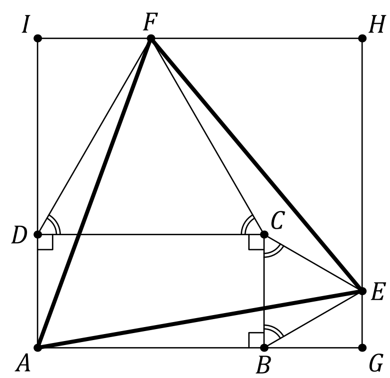
Poznámka:

V úvodnom obrázku je znázornený obdĺžnik, ktorého strana AB je dlhšia ako BC. Tento predpoklad nehrá v ďalšom žiadnu rolu – rovnaké argumenty, a teda aj záver, platí pre akýkoľvek obdĺžnik (vrátane štvorca). Nech G, H, I sú body také, že $AGHI$ je obdĺžnik taký, že B leží na AG, E na GH, F na HI a D na IA.

Riešenie 2:

Nech G, H, I sú body také, že $AGHI$ je obdĺžnik taký, že B leží na AG, E na GH, F na HI a D na IA.

Nech $a = |AB|$ a $b = |AD|$.



Potom BG je zhodná s výškou trojuholníka BEC a GE s polovicou jej základne BC, takže $|BG| = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ a $|GE| = \frac{1}{2}b$. Analogicky $|DI| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ a $|IF| = \frac{1}{2}a$.

Podľa Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku AGE potom platí:

$$|AE|^2 = |AG|^2 + |GE|^2 = (|AB| + |BG|)^2 + |GE|^2$$
$$= \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = a^2 + \frac{3}{4}b^2 + \sqrt{3}ab + \frac{1}{4}b^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab.$$

Analogicky podľa Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku AIF platí:

$$|AF|^2 = |AI|^2 + |IF|^2 = (|AD| + |DI|)^2 + |IF|^2$$
$$= \left(b + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = b^2 + \frac{3}{4}a^2 + \sqrt{3}ba + \frac{1}{4}a^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab.$$

A napokon, podľa Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku EHF platí:

$$|EF|^2 = |EH|^2 + |FH|^2 = (|GH| - |GE|)^2 - (|IH| - |IF|)^2$$
$$= (|AI| - |GE|)^2 - (|AG| - |IF|)^2 = (|AD| + |DI| - |GE|)^2 - (|AB| + |BG| - |IF|)^2$$
$$= \left(b + \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}a\right)^2 = \left(\frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ba\right) + \left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}ab\right) = a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab.$$

Zhrnutím dostávame

$$|AE|^2 = |AF|^2 = |EF|^2\,,$$

t. j.

$$|AE| = |AF| = |EF|\,,$$

čiže trojuholník AEF je rovnostranný.