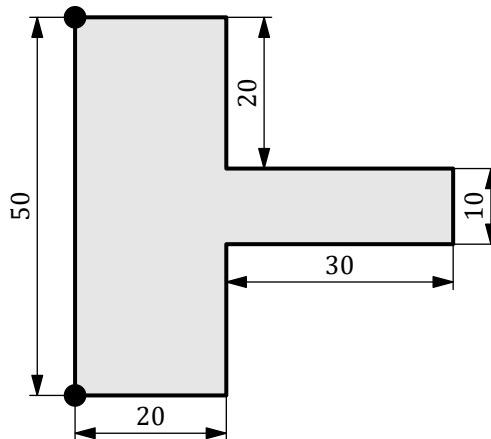


MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z7

- 1 Dvaja strážcovia dohliadajú na poriadok v miestnosti, ktorej pôdorys a rozmery sú znázornené na obrázku. Každé dve susedné steny sú navzájom kolmé, rozmery sú uvedené v metroch. Strážcovia stoja v rohoch označených krúžkami.

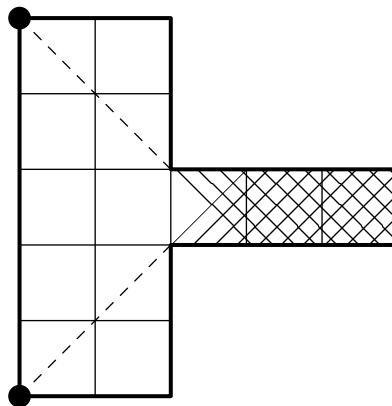


Aká veľká je časť miestnosti, na ktorú zo svojho miesta nedohliadne ani jeden zo strážcov?

(Eva Semerádová)

Riešenie:

Celú miestnosť je možné rozdeliť na štvorce so stranou 10 metrov ako na obrázku. Časti miestnosti, ktoré nevidia jednotliví strážcovia, sú vyznačené šrafovaním dvojitého druhu. Tá časť, na ktorú nedohliadne ani jeden, je teda šrafovaná dvojito:



Hraničné čiary šrafovania sú uhlopriečkami štvorca z pomocného delenia. Dvojito šrafovaná časť pozostáva z dvoch a štvrt' alebo $\frac{9}{4}$ štvorca. Plocha, na ktorú nevidí ani jeden zo strážcov, je $\frac{9}{4} \cdot (10 \text{ m})^2$ čiže 225 m^2 .

Poznámka:

Celá miestnosť pozostáva z 13 štvorcov pomocného delenia. Iná správna odpoveď na otázku zo zadania je, že časť miestnosti, na ktorú nevidí ani jeden zo strážcov, tvorí $\frac{9}{4 \cdot 13}$ čiže $\frac{9}{52}$ celej miestnosti.

Hodnotenie:

3 body za znázornenie príslušnej časti a pomocné delenie, 3 body za doriešenie úlohy a výsledok (v m^2 alebo ako zlomok).

- 2 Anna a Jozef sú manželia s jedenástimi potomkami. Priemerný vek ich dvoch detí je 63 rokov, priemerný vek ich štyroch vnúčat je 35 rokov a priemerný vek ich piatich pravnúčat sú 4 roky. Annin vek je triapolkrát väčší ako priemerný vek všetkých jedenástich potomkov. Ak sa dožijú, bude za päť rokov priemerný vek Anny a Jozefa rovných 100 rokov.

Koľko rokov má Anna a koľko Jozef?

(Eva Semerádová)

Riešenie:

Súčet vekov všetkých potomkov je $2 \cdot 63 + 4 \cdot 35 + 5 \cdot 4$ čiže 286 rokov. Ich priemerný vek je $286 : 11$ čiže 26 rokov. Teda Anna má $3,5 \cdot 26$ čiže 91 rokov.

O 5 rokov bude mať Anna 96 rokov. Aby priemerný vek Anny a Jozefa vtedy bol 100 rokov, Jozef musí mať o 5 rokov presne 104 rokov. Jozef má teraz teda 99 rokov.

Poznámka:

Informáciu o priemernom veku Anny a Jozefa možno zapísať takto:

$$(91 + 5 + j + 5) : 2 = 100,$$

kde j značí aktuálny vek Jozefa. Odtiaľ po úprave vyplýva, že $j = 99$.

Hodnotenie:

3 body za priemerný vek všetkých potomkov, 1 bod za Annin vek, 2 body za Jozefov vek.

- 3 Na turnaji sa zišli tímy Akúska, Blovenska, Colška a Demecka. Každý tím sa stretol s každým presne raz. Víťazný tím dostal tri body, porazený tím nedostal žiadny bod, pri nerozhodnom výsledku dostal každý z remizujúcich tímov po jednom bode. Po odohraní všetkých šiestich zápasov malo Akúsko 7 bodov, Blovensko 4 body, Colško 3 body a Demecko 2 body.

a) Koľko zápasov sa skončilo remízou?

b) Ako dopadol zápas Blovenska s Colškom?

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Názvy tímov skraccujeme na A, B, C a D. Každý tím hral 3 zápasy so zvyšnými tímami, za každý zápas mohol získať 0, 1 alebo 3 body. Rozdelenie bodov pre tímy A, B a D je teda dané jednoznačne, pre tím C sú dve možnosti:

- A: 3, 3, 1.
- B: 3, 1, 0.
- C: buď 3, 0, 0, alebo 1, 1, 1.
- D: 1, 1, 0.

Jeden bod vždy dostávajú dva tímy, teda celkový počet jednotiek v predchádzajúcich rozkladoch musí byť párný. V rozkladoch ziskov tímov A, B a D sú celkom štyri jednotky, preto tím C svoje 3 body musel získať takto: 3, 0, 0. Odtiaľ taktiež vyplýva, že remízou skončili dva zápasy.

Tím D remizoval dvakrát, nie však s tímom C, lebo ten neremizoval vôbec. Teda tím D remizoval s tímami A a B.

Tím A raz remizoval a dvakrát vyhral. Pritom remizoval s tímom D, teda vyhral nad tímami B a C.

Tím B raz prehral, raz remizoval a raz vyhral. Pritom prehral s tímom A a remizoval s tímom D, teda vyhral nad tímom C.

Zhrnutím dostávame:

a) Remízou sa skončili dva zápasy (Demecko s Akúskom a Blovenskom).

b) Blovensko nad Colškom vyhralo.

Poznámka:

Z uvedeného je možné zostaviť tabuľku výsledkov všetkých zápasov:

	A	B	C	D	spolu
A	-	3	3	1	7
B	0	-	3	1	4
C	0	0	-	3	3
D	1	1	0	-	2

Poznámka:

Odpoveď na otázku a) možno odvodiť aj takto: Celkom bolo v turnaji rozdelených $7 + 4 + 3 + 2$ čiže 16 bodov.

Pokiaľ by žiadny zápas neskončil remízou, bolo by celkom rozdelených $6 \cdot 3$ čiže 18 bodov. Každá remíza do celkového súčtu prispieva 2 bodmi (t. j. o jeden bod menej ako výhra), teda remízou skončili 2 zápasy.

Hodnotenie:

Po 2 bodoch za odpoveď na každú z otázok a) a b), 2 body za kvalitu komentára.

Vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže