MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2022/2023

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z8

1 Pankrác, Servác a Bonifác si kúpili čln. Pankrác zaplatil 60 % ceny člna, Servác zaplatil 40 % zvyšku ceny a Bonifác doplatil chýbajúcu čiastku, čo bolo 30 zlatiek.

Koľko zlatiek stál čln, ktorý si chlapci kúpili?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Cenu člna v zlatkách označíme c. Pankrác zaplatil $\frac{60}{100}c$ zlatiek, zostávalo doplatiť $c - \frac{60}{100}c$ čiže $\frac{40}{100}c$ zlatiek.

Servác zaplatil $\frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100}c$ čiže $\frac{1600}{10000}c$ zlatiek, čo je $\frac{16}{100}$ zlatiek, zostávalo doplatiť $\frac{40}{100}c - \frac{16}{100}c$ čiže $\frac{24}{100}c$ zlatiek.

Chýbajúcu čiastku 30 zlatiek zaplatil Bonifác, platí teda $\frac{24}{100}c = 30$, odkiaľ vyplýva, že $c = 125$.

Čln stál 125 zlatiek.

Urobíme skúšku: Pankrác zaplatil 60 % ceny člna, čo bolo 75 zlatiek, ostávalo teda zaplatiť 50 zlatiek. Servác zaplatil 40 % zvyšku ceny, čo bolo 20 zlatiek. Ostalo zaplatiť 30 zlatiek, čo urobil Bonifác.

Hodnotenie:

2 body za vyjadrenie Pankrácovho príspevku a zvyšku, 2 body za vyjadrenie Servácovho príspevku a zvyšku, 2 body za dopočítanie a odpoveď.

---

2 Je daný pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C a s dĺžkami odvesien v pomere $1 : 3$. Body K, resp. L sú stredy štvorcov, ktoré majú jednu stranu spoločnú s odvesnou AC, resp. BC a ktoré sa s trojuholníkom ABC neprekrývajú. Bod M je stredom prepony AB.

a) Zdôvodnite, že bod C leží na úsečke KL.

b) Vypočítajte pomer obsahov trojuholníkov ABC a KLM.

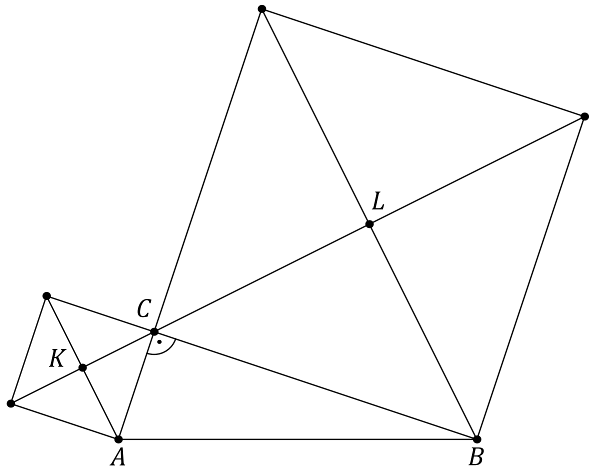
(Jaroslav Švrček)

Riešenie:

a) Úsečky KC a CL sú časťami uhlopriečok vo štvorcoch, preto uhly KCA a LCB majú veľkosť 45°. Uhol ACB je pravý, teda platí

$$|\sphericalangle KCL| = |\sphericalangle KCA| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCL| = 45° + 90° + 45° = 180°.$$

Odtiaľ vyplýva, že bod C je vnútorným bodom úsečky KL.



b) V ďalšom predpokladáme také značenie vrcholov, že $|AC| : |CB| = 1 : 3$. Veľkosť odvesny AC označíme b. S týmto značením platí

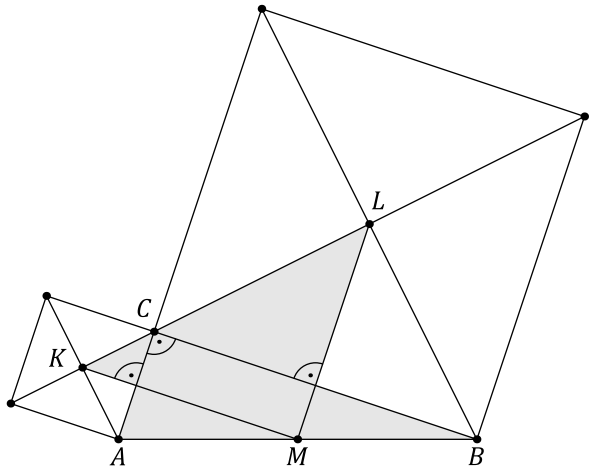
$$S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 3b = \frac{3}{2}b^2.$$

Zo zadania vyplýva, že úsečky KM a ML sú (predĺžené) stredné priečky trojuholníka ABC. Teda trojuholník KLM je tiež pravouhlý, a navyše rovnoramenný s veľkosťami ramien $\frac{1}{2}b + \frac{3}{2}b$ čiže $2b$. Potom platí

$$S(KLM) = \frac{1}{2}(2b \cdot 2b) = 2b^2,$$

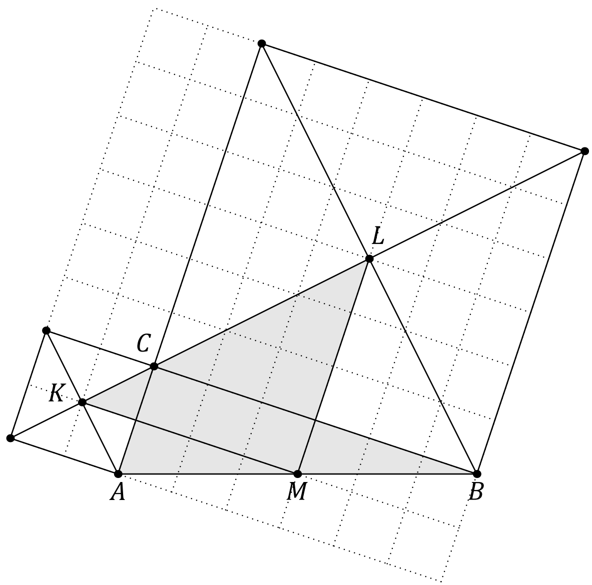
takže

$$S(ABC) : S(KLM) = \frac{3}{2}b^2 : 2b^2 = 3 : 4.$$



Poznámka:

Namiesto predchádzajúceho značenia $|AC| = b$, $|AB| = 3b$ atď. si možno vypomôcť s dodatočným delením, resp. znázornením v štvorčekovej sieti:



Poznámka:

Ako kolineárnosť bodov K, C, L, tak pravouhlosť a rovnoramennosť trojuholníka KLM je platná pre všeobecný pravouhlý trojuholník ABC. Daný pomer dĺžok odvesien ovplyvňuje iba pomer obsahov trojuholníkov ABC a KLM.

Hodnotenie:

Po 2 bodoch za odpoveď na každú z otázok a) a b), 2 body za kvalitu komentára.

---

3 Karolína napísala všetky trojciferné čísla tvorené číslicami 1, 2 a 3, v ktorých sa žiadna číslica neopakovala a v ktorých bola číslica 2 na mieste desiatok. Nikola napísala všetky trojciferné čísla tvorené číslicami 4, 5 a 6, v ktorých sa tiež žiadna číslica neopakovala. Kubo si vybral jedno číslo od Karolíny a jedno číslo od Nikoly tak, aby súčet týchto dvoch čísel bol párny.

Aká bola číslica na mieste jednotiek v súčine čísel, ktoré si Kubo vybral? Nájdite všetky možnosti.

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Karolína napísala čísla 123 a 321. Nikola napísala čísla 456, 465, 546, 564, 645, 654. Obe čísla od Karolíny sú nepárne. Kvôli párnemu súčtu teda musel Jakub vybrať od Nikoly nepárne číslo. Párny súčet teda dávajú práve tieto dvojice:

- 123 a 465,
- 123 a 645,
- 321 a 465,
- 321 a 645.

Vo všetkých prípadoch je číslica v súčine na mieste jednotiek určená nepárnym násobkom 5, je to teda 5.

Poznámka:

K správnemu záveru síce nie je potrebné súčiny vyčísľovať, ale tu sú:

- $123 \cdot 465 = 57\,195$,
- $123 \cdot 645 = 79\,335$,
- $321 \cdot 465 = 149\,265$,
- $321 \cdot 645 = 207\,045$.

Hodnotenie:

Po 1 bode za vypísanie Karolínin a Nikolinin čísel, 2 body za Kubov výber párneho súčtu, 2 body za určenie poslednej číslice súčinu.

Vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže