61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

1. *Medzi všetkými desaťcifernými číslami deliteľnými jedenástimi, v ktorých sa žiadna cifra neopakuje, nájdite najmenšie a najväčšie.* (Jaroslav Zhouf)

Riešenie. Uvažované desaťciferné čísla označme $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$, pričom a_9, a_8, ..., a_0 sú navzájom rôzne cifry, teda všetky cifry 0, 1, 2, ..., 9 v nejakom poradí. Ďalej označme $s_2 = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ súčet jeho cifier na párnych[1] miestach a $s_1 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ súčet cifier na nepárnych miestach.

Na zistenie deliteľnosti jedenástimi použijeme známe kritérium: Číslo $\overline{a_9a_8\ldots a_1a_0}$ je deliteľné jedenástimi práve vtedy, keď je jedenástimi deliteľný príslušný rozdiel s_2-s_1. Zrejme $|s_2 - s_1| \leqq (9+8+7+6+5)-(4+3+2+1+0) = 25$, čiže $-25 \leqq s_2 - s_1 \leqq 25$. Súčet $s_2 + s_1 = 0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ je nepárne číslo, preto musí byť nepárne aj číslo $s_2 - s_1$. Pre vyhovujúce číslo môžu teda nastať dve možnosti: $s_2 - s_1 = -11$ alebo $s_2 - s_1 = 11$.

V prvom prípade zo sústavy rovníc $s_2 + s_1 = 45$, $s_2 - s_1 = 11$ dostaneme $s_2 = 28$, $s_1 = 17$, v druhom naopak $s_2 = 17$, $s_1 = 28$.

Číslo 17 rozpíšeme všetkými možnými spôsobmi na súčet piatich navzájom rôznych cifier:

$$\begin{aligned}17 &= 9+5+2+1+0 = 9+4+3+1+0 =\\ &= 8+6+2+1+0 = 8+5+3+1+0 = 8+4+3+2+0 =\\ &= 7+6+3+1+0 = 7+5+4+1+0 = 7+5+3+2+0 = 7+4+3+2+1 =\\ &= 6+5+4+2+0 = 6+5+3+2+1.\end{aligned}$$

Medzi desaťcifernými číslami zapísanými všetkými desiatimi ciframi sú určite najväčšie tie, ktoré začínajú ciframi 987 alebo dokonca 9876. Vzhľadom na nájdené rozklady čísla 17 to zrejme nemožno dosiahnuť pre $s_1 = 17$, zato pre $s_2 = 17$ áno: stačí za s_2 zobrať súčet $17 = 8 + 6 + 2 + 1 + 0$, čo je zároveň jediná možnosť. Ostatné cifry už na základe tejto voľby doplníme jednoznačne tak, aby sme dostali číslo čo najväčšie. Hľadané najväčšie číslo je teda 9 876 524 130.

Najmenšie číslo nájdeme analogickým postupom. Keďže $a_9 \neq 0$, sú medzi uvažovanými číslami určite najmenšie tie, ktoré začínajú ciframi 102. Z nájdených rozkladov čísla 17 opäť vidíme, že to možno dosiahnuť jedine voľbou $s_1 = 17 = 6 + 5 + 3 + 2 + 1$. Tomu potom zodpovedá číslo (keďže poznáme všetky jeho cifry na nepárnych aj párnych miestach, je ich usporiadanie určené požiadavkou, aby výsledné číslo bolo najmenšie) 1 024 375 869.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Dokážte spomenuté kritérium deliteľnosti jedenástimi, t. j. že celé číslo je deliteľné jedenástimi práve vtedy, keď je jedenástimi deliteľný súčet jeho cifier braných striedavo so znamienkom plus a mínus. [Kritérium vyplýva z toho, že 10 dáva po delení jedenástimi rovnaký zvyšok ako -1, teda jednotlivé rády 10^n dávajú zvyšok $(-1)^n$.]

N2. Dokážte, že žiadne desaťciferné číslo zložené z navzájom rôznych cifier, v ktorého dekadickom zápise sa striedajú párne a nepárne cifry, nie je deliteľné jedenástimi.

[1] Miesta číslujeme podľa mocnín desiatky v dekadickom zápise; pre riešenie samozrejme nie je podstatné, ktoré miesta označíme za párne a ktoré za nepárne, dôležité je len to, že sa párne a nepárne miesta striedajú.

N3. Určte počet päťciferných čísel zložených z navzájom rôznych a) nepárnych, b) párnych cifier a deliteľných jedenástimi. [a) 0, b) 16]

N4. Bez delenia ukážte, že číslo 20 111 102 je deliteľné jedenástimi. Potom k nemu nájdite najbližšie menšie a najbližšie väčšie číslo deliteľné jedenástimi zložené z rovnakých cifier ako dané číslo. [menšie 20 110 211, väčšie 20 111 201]

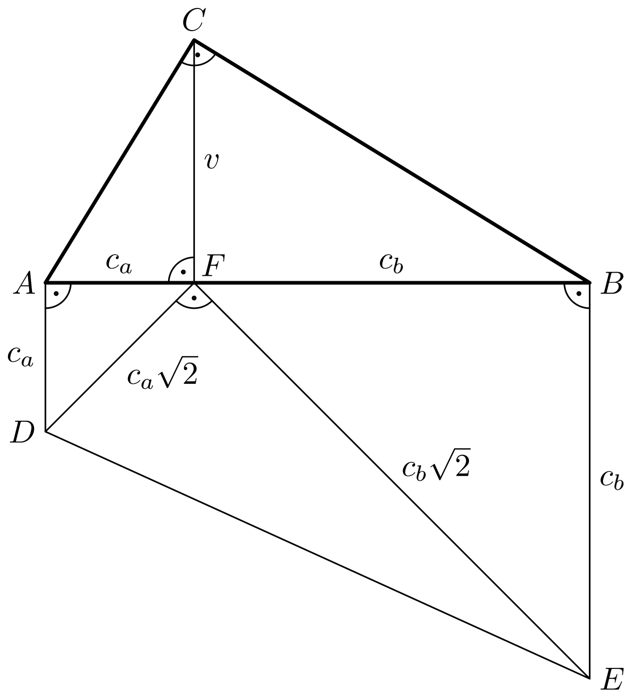
N5. Dokážte, že platí: Číslo $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ je deliteľné jedenástimi práve vtedy, keď je deliteľné jedenástimi číslo $\overline{a_9a_8} + \overline{a_7a_6} + \overline{a_5a_4} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0}$.

---

2. *Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C, ktorého obsah označme P. Nech F je päta výšky z vrcholu C na preponu AB. Na kolmiciach na priamku AB, ktoré prechádzajú vrcholmi A a B, v polrovine opačnej k polrovine ABC uvažujme postupne body D a E, pre ktoré platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Obsah trojuholníka DEF označme Q. Dokážte, že platí $P \geqq Q$, a zistite, kedy nastáva rovnosť.*
(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Označme úsečky (a ich dĺžky) ako na obr. 1. Keďže DAF a EBF sú pravouhlé rovnoramenné trojuholníky, majú uhly pri ich preponami veľkosť 45°, takže $|\measuredangle DFE| = 90°$ a trojuholník DEF je pravouhlý s odvesnami, ktoré sú zároveň preponami oboch rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov. Pre obsahy P a Q oboch uvažovaných trojuholníkov preto platí

$$P = \frac{1}{2}(c_a + c_b)v \qquad \text{a} \qquad Q = \frac{1}{2} \cdot c_a\sqrt{2} \cdot c_b\sqrt{2}.$$



Obr. 1

Podľa Euklidovej vety o výške v danom pravouhlom trojuholníku platí $v = \sqrt{c_a c_b}$. Na dôkaz danej nerovnosti stačí teda overiť, že

$$\frac{1}{2}(c_a + c_b)\sqrt{c_a c_b} \geqq \frac{1}{2} \cdot c_a\sqrt{2} \cdot c_b\sqrt{2}.$$

Po jednoduchej (ekvivalentnej) úprave dostaneme

$$c_a + c_b \geqq 2\sqrt{c_a c_b}, \qquad \text{čiže} \qquad (\sqrt{c_a} - \sqrt{c_b})^2 \geqq 0.$$

Keďže posledná nerovnosť očividne platí, je dôkaz tvrdenia ukončený. Rovnosť pritom nastane práve vtedy, keď $c_a = c_b$, t. j. práve vtedy, keď je daný pravouhlý trojuholník ABC rovnoramenný.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení vyjdeme zo zrejmého poznatku, že trojuholník DEF je pravouhlý. Odvesny oboch uvažovaných pravouhlých trojuholníkov majú rovnaké kolmé priemety na priamku AB, pritom

$$|AF| = |AC| \cos \gamma_1 = |DF| \cos 45^\circ, \quad |BF| = |BC| \cos \gamma_2 = |EF| \cos 45^\circ,$$

kde γ_1, γ_2 označujú zodpovedajúce časti pravého uhla pri vrchole C, takže $\gamma_2 = 90^\circ - \gamma_1$. Keďže $\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, vyplýva odtiaľ pre dvojnásobky oboch obsahov

$$2P = |AC| \cdot |BC| = |DF| \cdot |EF| \cdot \frac{\cos 45^\circ}{\cos \gamma_1} \cdot \frac{\cos 45^\circ}{\cos \gamma_2} =$$
$$= 2Q \cdot \frac{1}{2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_1} = 2Q \cdot \frac{1}{\sin 2\gamma_1} \geqq 2Q.$$

Rovnosť $P = Q$ zrejme nastane práve vtedy, keď $\sin 2\gamma_1 = 1$, čiže $\gamma_1 = \gamma_2 = 45^\circ$, teda práve vtedy, keď je daný trojuholník ABC rovnoramenný.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Dokážte, že pre každé dve kladné reálne čísla a, b platí nerovnosť $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geqq 2$.

N2. V obdĺžniku $ABCD$ s dĺžkami strán $|AB| = a$, $|BC| = b$ označme E pätu kolmice spustenej z vrcholu B na uhlopriečku AC. Určte dĺžky úsečiek AE, CE, BE. [$|AE| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|CE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|BE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$]

N3. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB je E päta výšky z vrcholu C, D päta výšky z bodu E na stranu AC a F päta výšky z bodu E na stranu BC. Dokážte, že obsah štvoruholníka $CDEF$ je nanajvýš rovný polovici obsahu trojuholníka ABC. Kedy nastane rovnosť? [Keďže trojuholníky AED a EBF sú podobné trojuholníku ABC s koeficientmi podobnosti α a $1-\alpha$, je obsah pravouholníka $CDEF$ rovný $S - (\alpha^2 + (1-\alpha)^2)S = 2\alpha(1-\alpha)S$, pričom S označuje obsah daného trojuholníka ABC. Požadovaná nerovnosť je tak ekvivalentná s nerovnosťou $\alpha(1-\alpha) \leqq \frac{1}{4}$, čiže $(2\alpha - 1)^2 \geqq 0$.]

---

3. *Nájdite všetky dvojice reálnych čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc*

$$x \cdot \lfloor y \rfloor = 7,$$
$$y \cdot \lfloor x \rfloor = 8.$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a.) (Pavel Novotný)

Riešenie. Z druhej rovnice vyplýva, že $\lfloor x \rfloor \neq 0$, a $y = 8/\lfloor x \rfloor$ je tým pádom nenulové číslo v absolútnej hodnote nie väčšie ako 8. Po dosadení do prvej rovnice dostaneme rovnicu

$$x \cdot \left\lfloor \frac{8}{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = 7, \tag{1}$$

ktorá je v skutočnosti s danou sústavou ekvivalentná v nasledujúcom zmysle: ak priradíme ľubovoľnému riešeniu x rovnice (1) hodnotu $y = 8/\lfloor x\rfloor$, bude zrejme dvojica (x, y) riešením pôvodnej sústavy.

Budeme preto postupne hľadať riešenia rovnice (1) pre jednotlivé hodnoty celých čísel $a = \lfloor 8/\lfloor x\rfloor\rfloor \in \{-8, \dots, -1, 1, \dots, 8\}$ tak, že vypočítame $x = 7/a$, $y = 8/\lfloor x\rfloor$ a overíme, či $\lfloor y\rfloor = a$. Navyše je vzhľadom na nerovnosť $\lfloor x\rfloor \neq 0$ z rovnice (1) zrejmé, že $a \neq 8$.

Pre $a = -8$ je $x = -\frac{7}{8}$, $\lfloor x\rfloor = -1$ a $y = -8$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = -7$ je $x = -1 = \lfloor x\rfloor$ a $y = -8$, teda $\lfloor y\rfloor < a$.

Pre $a = -6$ je $x = -\frac{7}{6}$, $\lfloor x\rfloor = -2$ a $y = -4$, teda $\lfloor y\rfloor > a$.

Pre $a = -5$ je $x = -\frac{7}{5}$, $\lfloor x\rfloor = -2$ a $y = -4$, teda $\lfloor y\rfloor > a$.

Pre $a = -4$ je $x = -\frac{7}{4}$, $\lfloor x\rfloor = -2$ a $y = -4$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = -3$ je $x = -\frac{7}{3}$, $\lfloor x\rfloor = -3$ a $y = -\frac{8}{3}$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = -2$ je $x = -\frac{7}{2}$, $\lfloor x\rfloor = -4$ a $y = -2$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = -1$ je $x = -7 = \lfloor x\rfloor$ a $y = -\frac{8}{7}$, teda $\lfloor y\rfloor < a$.

Pre $a = 1$ je $x = 7 = \lfloor x\rfloor$ a $y = \frac{8}{7}$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = 2$ je $x = \frac{7}{2}$, $\lfloor x\rfloor = 3$ a $y = \frac{8}{3}$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = 3$ je $x = \frac{7}{3}$, $\lfloor x\rfloor = 2$ a $y = 4$, teda $\lfloor y\rfloor > a$.

Pre $a \in \{4, 5, 6, 7\}$ je $\lfloor x\rfloor = 1$ a $y = 8$, teda $\lfloor y\rfloor > a$.

Záver. Sústava rovníc má 6 riešení, sú nimi usporiadané dvojice $\left(-\frac{7}{8}, -8\right)$, $\left(-\frac{7}{4}, -4\right)$, $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}\right)$, $\left(-\frac{7}{2}, -2\right)$, $\left(7, \frac{8}{7}\right)$ a $\left(\frac{7}{2}, \frac{8}{3}\right)$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V obore reálnych čísel riešte rovnicu: a) $\lfloor x\rfloor^2 = 4$, b) $\lfloor x^2\rfloor = 4$, c) $\left\lfloor \frac{\lfloor x\rfloor + 3}{2}\right\rfloor = 4$, d) $\left\lfloor \frac{2011}{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor = 4$. [a) $x \in \langle -2, -1) \cup \langle 2, 3)$, b) $2 \leqq |x| < \sqrt{5}$, c) $x \in \langle 5, 7)$, d) $x \in \langle 403, 503)$]

N2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc $xy = 2$, $x\lfloor y\rfloor = 4$. [Zrejme $x < 0$, $y < 0$. Dokážte ďalej, že $\lfloor -u\rfloor = -\lfloor u\rfloor$ pre každé celé číslo a $\lfloor -u\rfloor = -\lfloor u\rfloor - 1$ inak. Dobre je to tiež vidno z grafu funkcie $y = \lfloor x\rfloor$. Vyjde $x = -4$, $y = -\frac{1}{2}$.]

N3. Dokážte, že pre každé reálne číslo x a každé celé číslo k platí $\lfloor x + k\rfloor = \lfloor x\rfloor + k$.

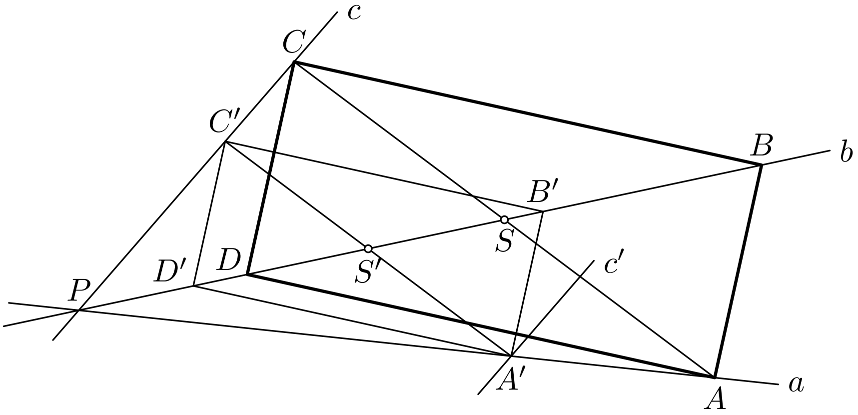
---

4. *Dané sú dve rôznobežky a, c prechádzajúce bodom P a bod B, ktorý na nich neleží. Zostrojte pravouholník $ABCD$ s vrcholmi A, C a D postupne na priamkach a, c a PB.*
(Jaromír Šimša)

Riešenie. Označme S priesečník uhlopriečok AC a BD, ktorý má ležať na priamke $b = PB$. Pritom nemôže byť $S = P$, pretože potom by na priamke a ležal aj vrchol C. Taká možnosť odporuje zadaniu.

Preto ak zvolíme na priamke b ľubovoľný bod S', $S' \neq P$, existuje práve jedna rovnoľahlosť so stredom P, ktorá zobrazí bod S na S'. V tejto rovnoľahlosti sa pravouholník $ABCD$ zobrazí na pravouholník $A'B'C'D'$ s priesečníkom uhlopriečok S', pritom $A' \in a$, $B', D' \in b$ a $C' \in c$. Keďže vrcholy A', C' sú súmerne združené podľa zvoleného stredu S' (obr. 2), zostrojíme bod A' ako priesečník priamky a s priamkou c', ktorá je súmerne združená s priamkou c podľa stredu S'. Potom už ľahko z bodov A', S' určíme bod C' a napokon – vďaka pravým uhlom $A'B'C'$ a $A'D'C'$ – nájdeme body B',

D' ako priesečníky priamky b s Tálesovou kružnicou nad priemerom $A'C'$. Pritom tieto dva priesečníky môžeme označiť ako B', D' v ľubovoľnom poradí s výnimkou prípadu, keď jeden z priesečníkov splynie s bodom P; v takom prípade môže byť jedine $D' = P$, lebo z $B \neq P$ vyplýva $B' \neq P$. Nakoniec zobrazíme pravouholník $A'B'C'D'$ v „spätnej“ rovnoľahlosti, v ktorej $B' \mapsto B$. Tak dostaneme štvoruholník $ABCD$, ktorý má zrejme všetky požadované vlastnosti.



Obr. 2

Diskusia. Pre zvolený bod $S' \in b$, $S' \neq P$, body A' a C' existujú a sú jediné (priamky a, c' sú totiž rôznobežky a žiadna z nich stredom súmernosti S' neprechádza). Kružnica nad priemerom $A'C'$ má kladný polomer, a preto má s priamkou b prechádzajúcou jej stredom S' vždy dva priesečníky. Ak sú oba rôzne od bodu P, má úloha dve riešenia. Jeden z týchto dvoch priesečníkov splynie s bodom P práve vtedy, keď bude uhol $A'PC'$ pravý, teda práve vtedy, keď dané priamky a, c budú navzájom kolmé. V takom prípade bude $D' = P$ a úloha bude mať jediné riešenie (vrchol D splynie s bodom P).

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Sú dané dve rôznobežky a, c a bod S neležiaci na žiadnej z nich. Zostrojte štvorec $ABCD$ so stredom S tak, aby bod A ležal na priamke a a bod C na priamke c. [Zostrojíme priamku a' ako obraz priamky a v stredovej súmernosti so stredom S, prienik priamok a', c dáva bod C.]

N2. Sú dané dve rôznobežky a, c, ktorých priesečník P je mimo výkresu, a bod B neležiaci na žiadnej z nich. Zostrojte priamku b prechádzajúcu bodmi B, P. [Zostrojíme ľubovoľný trojuholník ABC, kde $A \in a$ a $C \in c$, a potom zostrojíme trojuholník $A'B'C'$, ktorý bude jeho obrazom v nejakej rovnoľahlosti so stredom v bode P.]

N3. Daná je úsečka AB. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB tak, aby $|AC| = 2\cdot|BC|$. [Zostrojíme trojuholník $A'B'C'$ s požadovanými vlastnosťami a potom pomocou rovnoľahlosti (napr. so stredom v jednom z vrcholov) zostrojíme trojuholník, ktorého prepona bude mať dĺžku $|AB|$.]

---

5. *V istom meste majú vybudovanú sieť na šírenie klebiet, v ktorej si každý klebetník vymieňa informácie s tromi klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s tromi klebetníkmi. Inak sa klebety nešíria.*

a) Dokážte, že klebetníkov a klebetníc je rovnako veľa.

b) Predpokladajme, že sieť na šírenie klebiet je súvislá (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). Dokážte, že aj keď sa jeden klebetník z mesta odsťahuje, zostane sieť súvislá.

(Ján Mazák)

Riešenie. a) Nech m je počet klebetníkov. Keďže každý klebetník je v spojení s tromi klebetnicami, je medzi všetkými celkom $3m$ spojení. A keďže k rovnakému výsledku musíme dôjsť, keď spočítame všetky spojenia jednotlivých klebetníc, z ktorých každá je v spojení s tromi klebetníkmi, je klebetníc tiež m.

b) Predpokladajme, že po odsťahovaní jedného z klebetníkov sa sieť rozpadne na niekoľko súvislých častí. To znamená, že odsťahovaný klebetník bol v spojení s aspoň jednou klebetnicou v každej zo vzniknutých častí, inak by príslušná časť nebola prepojená so zvyškom siete už pred jeho odchodom. Odtiaľ je ďalej zrejmé, že vzniknuté časti sú nanajvýš tri, pričom počet klebetníc, ktoré boli v spojení s odsťahovaným klebetníkom, musí v každej z nich byť 1 alebo 2.

Uvažujme ľubovoľnú z častí, na ktoré sa sieť rozpadla, a označme m a n prislúchajúce počty klebetníkov a klebetníc v tejto časti. Ak teraz spočítame počet spojení všetkých klebetníkov v tejto časti, dostaneme $3m$. Vzhľadom na to, že jedna alebo dve klebetnice o jedno spojenie prišli, je celkový počet ich spojení s klebetníkmi $3n - 2$ alebo $3n - 1$. Ani jedno z týchto čísel však nie je deliteľné tromi, preto sa nemôže nikdy rovnať celkovému počtu spojení klebetníkov vo zvolenej časti. To je spor, ktorý dokazuje tvrdenie b) úlohy.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V sieti na šírenie klebiet je m klebetníkov a n klebetníc. Každý z klebetníkov je v spojení s a klebetnicami a každá klebetnica je v spojení s b klebetníkmi. Inak sa klebety nešíria. Aký je vzťah medzi premennými a, b, m, n? [$ma = nb$]

N2. Vytvorte model súvislej siete opísanej v zadaní úlohy pre 3, 4, 5, ... klebetníkov a klebetníc. Ukážte v tomto modeli, že po odstránení ktoréhokoľvek klebetníka zostane sieť súvislá.

N3. Pre aký počet klebetníkov a klebetníc môže byť sieť opísaná v zadaní úlohy nesúvislá? [pre 6, 7, 8, ...]

N4. V súvislej sieti na šírenie klebiet je každý klebetník v spojení s aspoň a) jedným, b) dvoma ďalšími klebetníkmi. Zostane sieť súvislá, ak sa jeden z nich odsťahuje? [a) aj b): môže, ale nemusí zostať súvislá, záleží na tvare siete]

---

6. *Anna a Boris hrajú kartovú hru. Každý z nich má päť kariet s hodnotami* 1 *až* 5 *(z každej jednu). V každom z piatich kôl obaja vyložia jednu kartu a kto má vyššie číslo, získa bod. V prípade kariet s rovnakými číslami nezíska bod nikto. Použité karty sa do hry nevracajú. Ten, kto získa na konci viac bodov, vyhral. Koľko percent zo všetkých možných priebehov takej hry skončí výhrou Anny?* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Opísaná hra je zrejme spravodlivá v tom zmysle, že obaja hráči majú rovnaký počet možností ako vyhrať. Aby sme zistili požadovaný počet, stačí zistiť, koľkými spôsobmi môže nastať remíza, teda jeden z výsledkov 0 : 0, 1 : 1 a 2 : 2.

Prípad 0 : 0 nastane, ak obaja hráči vyložia v každom kole rovnaké karty. Takých možností je $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

Výsledok 1 : 1 znamená, že hráči vyložia rovnaké karty v troch kolách a v dvoch zvyšných kolách vyložia dve rôzne karty (x, y), každý v inom poradí. Každý taký výsledok je teda jednoznačne určený poradím kariet jedného z hráčov a výberom kôl, v ktorých druhý hráč zahrá rovnako. Tri kolá z piatich možno vybrať 10 spôsobmi a päť kariet možno usporiadať 5! spôsobmi. Výsledok 1 : 1 tak nastane v $10 \cdot 5!$ prípadoch.

Ostáva vyšetriť, kedy nastane výsledok 2 : 2. Tú kartu x, ktorú vyložia hráči v jednom z piatich kôl obaja naraz, je možné vybrať 5 spôsobmi. Anne aj Borisovi potom zvýšia štyri karty $a < b < c < d$. Keďže na poradí kôl nezáleží, spočítajme najprv, koľko je možností v prípade, že Anna vyloží karty x, a, b, c, d v tomto poradí. Aby nedošlo k ďalšej remíze, musí Anna získať ďalší bod v poslednom kole za kartu d, zatiaľ čo Boris musí získať bod v druhom kole, keď Anna vyloží kartu a. Preto stačí zistiť, aké má Boris v treťom a štvrtom kole možnosti, aby tieto dve kolá skončili 1 : 1.

V týchto kolách musí Boris vyložiť jednu z dvojíc (a, d), (c, a), (c, b), (d, a), (d, b), ktoré možno doplniť kartami pre druhé a piate kolo tak, aby v nich nenastala remíza, do celkom siedmich poradí:

$$(x, b, a, d, c),\ (x, c, a, d, b),\ (x, d, c, a, b),\ (x, d, c, b, a),\ (x, b, d, a, c),$$
$$(x, c, d, a, b),\ (x, c, d, b, a).$$

Anna môže karty x, a, b, c, d vyložiť 5! spôsobmi. Výsledok 2 : 2 tak nastane v $5 \cdot 7 \cdot 5!$ prípadoch.

Celkovo môžu ako Anna, tak Boris vyložiť karty 5! spôsobmi, to je dokopy $5!^2$ možností. Keďže počet všetkých možných priebehov hry, v ktorých nastane remíza, je rovný $5! + 10 \cdot 5! + 5 \cdot 7 \cdot 5! = 5! \cdot 46$, je počet možných výhier každého z nich $\frac{1}{2}(5!^2 - - 5! \cdot 46) = 5! \cdot 37$. Výhrou Anny teda skončí

$$\frac{5! \cdot 37}{5!^2} = \frac{37}{120} \approx 0{,}31 = 31\,\%$$

všetkých možných hier.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Aké sú možné bodové výsledky kartovej hry v zadanej úlohe? [4 : 1, 1 : 4, 3 : 2, 2 : 3, 3 : 1, 1 : 3, 2 : 2, 2 : 1, 1 : 2, 1 : 1, 0 : 0]

N2. Koľkými spôsobmi mohol prebehnúť „skrátený“ volejbalový set medzi družstvami A a B, ak sa hral do 5 bodov, zvíťazilo družstvo A a vieme, že víťaz vyhral aspoň o dva body? (Zaujíma nás nielen výsledok, ale celý priebeh, ako body pribúdali.) [$\binom{4}{0} + \binom{5}{1} + + \binom{6}{2} + \binom{7}{3} = 1 + 5 + 15 + 35 = 56$, pri takých malých hodnotách sa dá počítať aj bez kombinačných čísel.]

N3. Aký je počet desaťciferných čísel zložených z rôznych cifier, v ktorých sa striedajú párne a nepárne cifry? Koľko je to percent zo všetkých desaťciferných čísel zložených z rôznych cifier? [$5! \cdot 5! + 4 \cdot 4! \cdot 5! = 9 \cdot 4! \cdot 5!$, $\frac{9 \cdot 4! \cdot 5!}{9 \cdot 9!} = \frac{1}{2 \cdot 63} \approx 0{,}008 = 0{,}8\,\%$]

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: 1. Jaroslav Zhouf, 2. Jaroslav Švrček, 3. Pavel Novotný, 4. Jaromír Šimša, 5. Ján Mazák, 6. Tomáš Jurík

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Jaroslav Zhouf

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011