61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

1. *Nájdite všetky trojčleny $p(x) = ax^2 + bx + c$, ktoré dávajú po delení dvojčlenom $x + 1$ zvyšok 2 a po delení dvojčlenom $x + 2$ zvyšok 1, pričom $p(1) = 61$.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Dvojnásobným použitím algoritmu delenia dostaneme

$$ax^2 + bx + c = (ax + b - a)(x + 1) + c - b + a,$$
$$ax^2 + bx + c = (ax + b - 2a)(x + 2) + c - 2b + 4a.$$

Dodajme k tomu, že nájdené zvyšky $c - b + a$ a $c - 2b + 4a$ sú zrejme rovné hodnotám $p(-1)$, resp. $p(-2)$, čo je v zhode s poznatkom, že akýkoľvek mnohočlen $q(x)$ dáva pri delení dvojčlenom $x - x_0$ zvyšok rovný číslu $q(x_0)$.

Podľa zadania platí $c - b + a = 2$ a $c - 2b + 4a = 1$. Tretia rovnica $a + b + c = 61$ je vyjadrením podmienky $p(1) = 61$. Získanú sústavu troch rovníc vyriešime jedným z mnohých možných postupov.

Z prvej rovnice vyjadríme $c = b - a + 2$, po dosadení do tretej rovnice dostaneme $a + b + (b - a + 2) = 61$, čiže $2b = 59$. Odtiaľ $b = 59/2$, čo po dosadení do prvej a druhej rovnice dáva $a + c = 63/2$, resp. $c + 4a = 60$. Ak odčítame posledné dve rovnice od seba, dostaneme $3a = 57/2$, odkiaľ $a = 19/2$, takže $c = 63/2 - 19/2 = 22$. Hľadaný trojčlen je teda jediný a má tvar

$$p(x) = \frac{19}{2} \cdot x^2 + \frac{59}{2} \cdot x + 22 = \frac{19x^2 + 59x + 44}{2}.$$

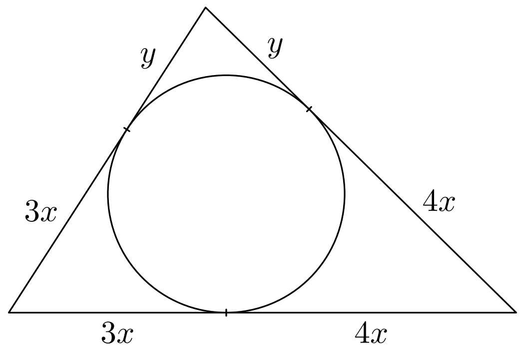
Návodné a doplňujúce úlohy:

- N1. Ukážte, že pre každé číslo a je mnohočlen $x^4 + (1-a)x^3 + x^2 + a$ deliteľný mnohočlenom $x^2 + x + 1$ bezo zvyšku. [Podiel je rovný $x^2 - ax + a$.]
- N2. Určte všetky reálne čísla a, pre ktoré je trojčlen $x^2 + 5x + 6$ deliteľný dvojčlenom $x + a$. Riešte jednak použitím algoritmu delenia, jednak použitím pravidla (často nazývaného *Bezoutova veta*), že mnohočlen $p(x)$ je deliteľný dvojčlenom $x - x_0$ práve vtedy, keď $p(x_0) = 0$. [Vyhovujú čísla $a = 2$ a $a = 3$, lebo priamym delením dostaneme rovnosť mnohočlenov $x^2 + 5x + 6 = (x + a)(x + 5 - a) + a^2 - 5a + 6$, takže hľadané čísla a sú korene rovnice $a^2 - 5a + 6 = 0$.]
- N3. Určte všetky reálne čísla a, pre ktoré trojčlen $x^2 + 5x + 6$ dáva pri delení dvojčlenom $x + a$ zvyšok 2. [Vyhovujú čísla $a = 1$ a $a = 4$, ktoré dostaneme, keď pre všeobecný zvyšok $a^2 - 5a + 6$ (pozri úlohu 2) zostavíme a vyriešime rovnicu $a^2 - 5a + 6 = 2$.]
- N4. Ukážte, že všetky trojčleny $p(x) = ax^2 + 2(a - 1)x - 4$, kde a je ľubovoľné číslo, sú deliteľné jedným dvojčlenom $x + b$ s vhodným koeficientom b. Akým? [$b = 2$. Číslo b má požadovanú vlastnosť práve vtedy, keď platí $p(-b) = 0$. Pretože $p(-b) = a(b^2 - 2b) + 2b - 4 = (b - 2)(ab + 2)$, je rovnosť $p(-b) = 0$ splnená pre každé a práve vtedy, keď $b = 2$.]
- N5. Určte všetky dvojice reálnych čísel a a b, pre ktoré je mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ deliteľný mnohočlenom $x^2 + bx + a$. [56–B–S–1]

2. *Dĺžky strán trojuholníka sú v metroch vyjadrené celými číslami. Určte ich, ak má trojuholník obvod 72 m a ak je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere 3 : 4.* (Pavel Leischner)

Riešenie. Využijeme všeobecný poznatok, že body dotyku vpísanej kružnice delia hranicu trojuholníka na šesť úsečiek, a to tak, že každé dve z nich, ktoré vychádzajú z toho istého vrcholu trojuholníka, sú zhodné. (Dotyčnice z daného bodu k danej kružnici sú totiž súmerne združené podľa spojnice daného bodu so stredom danej kružnice.)

V našej úlohe je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená na úseky, ktorých dĺžky označíme $3x$ a $4x$; dĺžku úsekov z vrcholu oproti najdlhšej strane označíme y (obr. 1). Strany trojuholníka majú teda dĺžky $7x$, $4x + y$ a $3x + y$, kde x, y sú neznáme kladné čísla (dĺžky berieme bez jednotiek). Ak má byť $7x$ dĺžka najdlhšej strany, musí platiť $7x > 4x + y$, čiže $3x > y$. Zdôraznime, že hľadané čísla x, y nemusia byť nutne celé, podľa zadania to však platí o číslach $7x$, $4x + y$ a $3x + y$.



Obr. 1

Údaj o obvode trojuholníka zapíšeme rovnosťou

$$72 = 7x + (3x + y) + (4x + y), \quad \text{čiže} \quad 36 = 7x + y.$$

Pretože $7x$ je celé číslo, je celé i číslo $y = 36 - 7x$; a pretože podľa zadania i čísla $4x + y$ a $3x + y$ sú celé, je celé i číslo $x = (4x + y) - (3x + y)$. Preto od tohto okamihu už hľadáme dvojice *celých* kladných čísel x, y, pre ktoré platí

$$3x > y \quad \text{a} \quad 7x + y = 36.$$

Odtiaľ vyplýva $7x < 36 < 7x + 3x = 10x$, teda $x \leqq 5$ a súčasne $x \geqq 4$.

Pre $x = 4$ je $y = 8$ a $(7x, 4x+y, 3x+y) = (28, 24, 20)$, pro $x = 5$ je $y = 1$ a $(7x, 4x + y, 3x + y) = (35, 21, 16)$. Strany trojuholníka sú teda $(28, 24, 20)$ alebo $(35, 21, 16)$. (Trojuholníkové nerovnosti sú zrejme splnené.)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pomocou dĺžok a, b, c strán všeobecného trojuholníka vyjadrite dĺžky úsečiek, na ktoré sú tieto strany rozdelené bodmi dotyku kružnice vpísanej tomuto trojuholníku. Na príklade potom ukážte, že tieto dĺžky nemusia byť vyjadrené celými číslami, aj keď strany trojuholníka takéto vyjadrenia majú. [Ide o dve úsečky dĺžky $x = \frac{1}{2}(a + b - c)$, dve úsečky dĺžky $y = \frac{1}{2}(b + c - a)$ a dve úsečky dĺžky $z = \frac{1}{2}(c + a - b)$. Tieto dĺžky nie sú celočíselné, ak sú napríklad všetky tri dĺžky a, b, c vyjadrené nepárnymi číslami.]

N2. Ak zostrojíme z troch úsečiek ľubovoľných dĺžok p, q, r úsečky dĺžok $a = p+q$, $b = q+r$ a $c = r + p$, budú tieto tri nové úsečky dĺžkami strán nejakého trojuholníka. Vysvetlite a potom zistite, aký význam v takom trojuholníku budú mať pôvodné dĺžky p, q, r. [Overiť algebraicky trojuholníkové nerovnosti $a + b > c > |a - b|$ je triviálne, lebo ide o zrejmé nerovnosti $p + 2q + r > p + r > |p - r|$. V trojuholníku so stranami a, b, c sú dĺžky p, q, r dĺžkami úsečiek, na ktoré sú strany a, b, c rozdelené bodmi dotyku vpísanej kružnice, ako to vyplýva z výsledku úlohy 1.]

N3. Trojuholník ABC spĺňa pri zvyčajnom označení dĺžok strán podmienku $a \leqq b \leqq c$. Vpísaná kružnica sa dotýka strán AB, BC a AC postupne v bodoch K, L a M.

Dokážte, že z úsečiek AK, BL a CM je možné zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď platí $b + c < 3a$. [57–C–II–1]

N4. Dokážte, že v každom pravouhlom trojuholníku je súčet polomerov vpísanej kružnice a opísanej kružnice rovný aritmetickému priemeru dĺžok oboch odvesien. [Prvé riešenie úlohy 59–A–S–2.]

N5. Určte dĺžku prepony pravouhlého trojuholníka, ak poznáte polomer r kružnice vpísanej a polomer R kružnice pripísanej k prepone tohto trojuholníka (t. j. kružnice, ktorá sa dotýka zvonku prepony a predĺženia oboch odvesien trojuholníka). [45–C–I–6]

---

3. *Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí množinová rovnosť*

$$\big\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\big\} = \{2,3,5,60,90,180\},$$

pričom (x,y) a $[x,y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y. (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Prvky danej množiny M rozložíme na prvočinitele:

$$\mathsf{M} = \{2,\ 3,\ 5,\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\}.$$

Odtiaľ vyplýva, že v rozklade hľadaných čísel a, b, c vystupujú iba prvočísla 2, 3 a 5. Každé z nich je pritom prvočiniteľom práve dvoch z čísel a, b, c: keby bolo prvočiniteľom len jedného z nich, chýbalo by v rozklade troch najväčších spoločných deliteľov a jedného najmenšieho spoločného násobku, teda v štyroch číslach z M; keby bolo naopak prvočiniteľom všetkých troch čísel a, b, c, nechýbalo by v rozklade žiadneho čísla z M. Okrem toho vidíme, že v rozklade každého z čísel a, b, c je prvočíslo 5 najviac v jednom exemplári.

Podľa uvedených zistení môžeme čísla a, b, c usporiadať tak, že rozklady čísel a, b obsahujú po jednom exemplári prvočísla 5 (potom $(c,5) = 1$) a že $(a,2) = 2$ (ako vieme, aspoň jedno z čísel a, b musí byť párne). Číslo 5 z množiny M je potom nutne rovné (a,b), takže platí $(b,2) = 1$, a preto $(b,3) = 3$ (inak by platilo $(b,c) = 1$), odtiaľ zase s ohľadom na $(a,b) = 5$ vyplýva $(a,3) = 1$. Máme teda $a = 5 \cdot 2^s$ a $b = 5 \cdot 3^t$ pre vhodné prirodzené čísla s a t.

Z rovnosti $[a,b] = 2^s \cdot 3^t \cdot 5$ vyplýva, že nastane jeden z troch nasledovných prípadov.

(1) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5$. Vidíme, že platí $s = 2$ a $t = 1$, čiže $a = 20$ a $b = 15$. Ľahko určíme, že tretím číslom je $c = 18$.

(2) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5$. V tomto prípade $a = 10$, $b = 45$ a $c = 12$.

(3) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Teraz $a = 20$, $b = 45$ a $c = 6$.

Odpoveď. Hľadané čísla a, b, c tvoria jednu z množín $\{20,15,18\}$, $\{10,45,12\}$ a $\{20,45,6\}$.

Iné riešenie. V danej rovnosti je množina napravo tvorená šiestimi rôznymi číslami väčšími ako 1, takže čísla (a,b), (a,c), (b,c) musia byť netriviálnymi deliteľmi postupne čísel $[a,b]$, $[a,c]$, $[b,c]$. Čísla 2, 3, 5 ale žiadne netriviálne delitele nemajú, musí teda platiť

$$\big\{(a,b),(a,c),(b,c)\big\} = \{2,3,5\} \quad \text{a} \quad \big\{[a,b],[a,c],[b,c]\big\} = \{60,90,180\}.$$

Pretože poradie čísel a, b, c nehrá žiadnu úlohu, môžeme predpokladať, že platí $(a,b) = 2$, $(a,c) = 3$ a $(b,c) = 5$. Odtiaľ vyplývajú vyjadrenia

$$a = 2 \cdot 3 \cdot x = 6x, \quad b = 2 \cdot 5 \cdot y = 10y, \quad c = 3 \cdot 5 \cdot z = 15z$$

pre vhodné prirodzené čísla x, y, z. Zo známej rovnosti $[x,y]\cdot(x,y) = xy$ tak dostaneme vyjadrenia najmenších spoločných násobkov v tvare

$$[a,b] = \frac{6x\cdot 10y}{2} = 30xy, \quad [a,c] = \frac{6x\cdot 15z}{3} = 30xz, \quad [b,c] = \frac{10y\cdot 15z}{5} = 30yz.$$

Z rovnosti $\{30xy, 30xz, 30yz\} = \{60, 90, 180\}$ upravenej na $\{xy, xz, yz\} = \{2, 3, 6\}$ potom vďaka tomu, že 2 a 3 sú prvočísla, vyplýva $\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$. Pretože z podmienky $5 = (b,c) = (10y, 15z)$ vyplýva $y \neq 3$ a $z \neq 2$, prichádzajú do úvahy len trojice (x,y,z) rovné $(1,2,3)$, $(2,1,3)$ a $(3,2,1)$, ktorým postupne zodpovedajú trojice (a,b,c) rovné $(6,20,45)$, $(12,10,45)$, $(18,20,15)$. Skúškou sa presvedčíme, že všetky tri vyhovujú množinovej rovnosti zo zadania úlohy.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Určte, pre ktoré prirodzené čísla a, b platí $(a,b) = 10$ a zároveň $[a,b] = 150$. [$\{a,b\} = \{10, 150\}$ alebo $\{a,b\} = \{30, 50\}$. Pretože $10 = 2\cdot 5$ a $150 = 2\cdot 3\cdot 5^2$, požadované rovnosti sú splnené práve vtedy, keď $a = 2\cdot 3^s\cdot 5^t$ a $b = 2\cdot 3^u\cdot 5^v$, kde $\{s,u\} = \{0,1\}$ a $\{t,v\} = \{1,2\}$.]

N2. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b platí vzťah $[a,b]\cdot(a,b) = ab$. [Podľa úvahy o počtoch zastúpení každého prvočísla v číslach a, b, (a,b) a $[a,b]$ stačí vysvetliť, prečo pre akékoľvek čísla α, β platí rovnosť $\min\{\alpha,\beta\} + \max\{\alpha,\beta\} = \alpha + \beta$. K tomu stačí rozlíšiť prípady $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ a $\alpha > \beta$. Iné riešenie: Nech $d = (a,b)$, potom $a = xd$, $b = yd$ pre nesúdeliteľné x a y, odtiaľ vyplýva $[a,b] = xyd$, takže oba súčiny $[a,b]\cdot(a,b)$ a ab sa rovnajú číslu xyd^2.]

N3. Nájdite všetky trojice a, b, c prirodzených čísel, pre ktoré súčasne platí $(ab,c) = 2^8$, $(bc,a) = 2^9$ a $(ca,b) = 2^{11}$. [50–C–S–1]

N4. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí $a + b + [a,b] + (a,b) = 50$. [50–C–II–1]

N5. Pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b dokážte nerovnosť $a\cdot(a,b) + b\cdot[a,b] \geqq 2ab$. Zistite tiež, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť. [60–C–I–5]

---

4. *Reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnici $ab + bc + cd + da = 16$.*

a) Dokážte, že medzi číslami a, b, c, d sa nájdu dve so súčtom najviac 4.

b) Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$? (Ján Mazák)

Riešenie. a) Z rovnosti $16 = ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$ vyplýva, že obidva súčty $a + c$ a $b + d$ nemôžu byť väčšie ako 4 súčasne, lebo v opačnom prípade by bol ich súčin väčší ako 16. Preto vždy aspoň jeden zo súčtov $a + c$ alebo $b + d$ má požadovanú vlastnosť.

b) Využijeme všeobecnú rovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \tfrac{1}{2}(a-b)^2 + \tfrac{1}{2}(b-c)^2 + \tfrac{1}{2}(c-d)^2 + \tfrac{1}{2}(d-a)^2 + ab + bc + cd + da,$$

o platnosti ktorej sa ľahko presvedčíme úpravou pravej strany. Vzhľadom na nezápornosť druhých mocnín $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-d)^2$ a $(d-a)^2$ dostávame pre ľavú stranu rovnosti odhad

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqq ab + bc + cd + da = 16.$$

Je nájdené číslo 16 najmenšou hodnotou uvažovaných súčtov? Ináč povedané: nastane pre niektorú vyhovujúcu štvoricu v odvodenej nerovnosti rovnosť? Z nášho postupu je jasné, že musíme rozhodnúť, či pre niektorú z uvažovaných štvoríc platí $a - b = b - c = c - d = d - a = 0$, čiže $a = b = c = d$. Pre takú štvoricu má rovnosť $ab + bc + cd + da = 16$ tvar $4a^2 = 16$, čomu vyhovuje $a = \pm 2$. Pre vyhovujúce štvorice $a = b = c = d = 2$ a $a = b = c = d = -2$ má súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ naozaj hodnotu 16, preto ide o hľadané minimum.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Ak reálne čísla x, y, z vyhovujú rovnici $x^2+y^2=z^2$, potom aspoň jedno z čísel $|x+z|$, $|x-z|$ neprevyšuje hodnotu $|y|$. Dokážte. [Keby $|x+z|$, $|x-z|$ boli dve (kladné) čísla väčšie ako $|y|$, bolo by číslo $|x+z|\cdot|x-z|$ väčšie ako $|y|^2$, podľa zadania ale ide o dve rovnaké čísla.]

N2. Nech x, y, z sú kladné reálne čísla. Ukážte, že čísla $x+y+z-xyz$ a $xy+yz+zx-3$ nemôžu byť súčasne záporné. [60–C-II–4]

N3. Je dané prirodzené číslo n ($n \geqq 2$) a reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pre ktoré platí $x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1$. Dokážte nerovnosť $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqq n$. [55–C–I–4]

N4. Ak reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnosti $a^2+b^2=b^2+c^2=c^2+d^2=1$, platí nerovnosť $ab+ac+ad+bc+bd+cd \leqq 3$. Dokážte a zistite, kedy pritom nastane rovnosť. [55–C–II–2]

N5. Dokážte, že nerovnosť $(a^2+1)(b^2+1)-(a-1)^2(b-1)^2 \geqq 4$ platí pre ľubovoľné čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$. Zistite, kedy nastane rovnosť. [59–C–II–2]

N6. Dokážte, že nerovnosť $(a+bc)(b+ac) \geqq ab(c+1)^2$ platí pre ľubovoľné nezáporné čísla a, b, c. Zistite, kedy nastane rovnosť. [58–C–S–1]

N7. Nerovnosti $\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ dokážte pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b. [58–C–I–6]

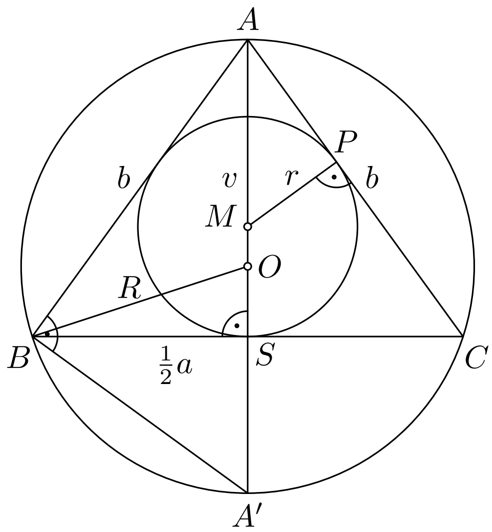
N8. Nech a, b, c sú reálne čísla, ktorých súčet je 6. Dokážte, že aspoň jedno z čísel $ab+bc$, $bc+ca$ alebo $ca+ab$ nie je väčšie ako 8. [60–B–I–3]

---

5. *Daný je rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky a a ramenami dĺžky b. Pomocou nich vyjadrite polomer R kružnice opísanej a polomer r kružnice vpísanej tomuto trojuholníku. Potom ukážte, že platí $R \geqq 2r$, a zistite, kedy nastane rovnosť.*

(*Leo Boček*)

Riešenie. Označme S stred základne BC daného rovnoramenného trojuholníka ABC, O stred jeho opísanej kružnice, M stred vpísanej kružnice a P pätu kolmice z bodu M na rameno AC (obr. 2).



Obr. 2

Z pravouhlého trojuholníka BSA pomocou Pytagorovej vety vyjadríme veľkosť v výšky AS, pričom v pravouhlom trojuholníku BSO s preponou dĺžky R pre odvesnu OS

platí $|OS| = \big||AS| - |AO|\big| = |v - R|$ (musíme si uvedomiť, že v tupouhlom trojuholníku ABC bude bod S ležať medzi bodmi A a O!). Dostávame tak dve rovnosti

$$\begin{aligned} v^2 &= b^2 - \frac{a^2}{4}, \\ R^2 &= \frac{a^2}{4} + (v - R)^2; \end{aligned}$$

ich sčítaním vyjde

$$v^2 + R^2 = b^2 + (v - R)^2, \quad \text{čiže} \quad b^2 = 2vR.$$

Dosadením z prvej rovnice $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ do poslednej rovnosti dostaneme hľadaný vzorec pre R.

Dodajme, že rovnosť $b^2 = 2vR$, ktorú sme práve odvodili a z ktorej už ľahko vyplýva vzorec pre polomer R, je Euklidovou vetou o odvesne AB pravouhlého trojuholníka ABA' s preponou AA', ktorá je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC (obr. 2).

Nájdený vzorec pre polomer R zapíšeme prehľadne spolu s druhým hľadaným vzorcom pre polomer r, ktorého odvodeniu sa ešte len budeme venovať:

$$R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \quad \text{a} \quad r = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}. \tag{$*$}$$

Druhý zo vzorcov $(*)$ sa dá získať okamžite zo známeho vzťahu $r = 2S/(a + b + c)$ pre polomer r kružnice vpísanej do trojuholníka so stranami a, b, c a obsahom S; v našom prípade stačí len dosadiť $b = c$ a $2S = av$, kde $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ podľa úvodnej časti riešenia.

Ďalšie dva spôsoby odvodenia druhého zo vzorcov $(*)$ založíme na úvahe o pravouhlom trojuholníku AMP, ktorého strany majú dĺžky

$$|AM| = v - r, \quad |MP| = r, \quad |AP| = |AC| - |PC| = b - |SC| = b - \frac{a}{2}.$$

Pre tento trojuholník môžeme napísať Pytagorovu vetu alebo využiť jeho podobnosť s trojuholníkom ACS, konkrétne zapísať rovnosť sínusov ich spoločného uhla pri vrchole A. Podľa toho dostaneme rovnice

$$(v - r)^2 = r^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad \frac{r}{v - r} = \frac{\frac{1}{2}a}{b},$$

ktoré sú obidve lineárne vzhľadom na neznámu r a majú riešenie

$$r = \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad r = \frac{av}{a + 2b}.$$

Po dosadení za v v oboch prípadoch dostaneme hľadaný vzorec pre r. V druhom prípade je to zrejmé, v prvom to ukážeme:

$$\begin{aligned} r &= \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{v^2 - b^2 + ab - \frac{1}{4}a^2}{2v} = \frac{2ab - a^2}{4v} = \\ &= \frac{a(2b - a)}{2\sqrt{(2b - a)(2b + a)}} = \frac{a\sqrt{2b - a}}{2\sqrt{2b + a}} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}. \end{aligned}$$

Ešte ostáva dokázať nerovnosť $R \geqq 2r$. Využijeme na to odvodené vzorce (∗), z ktorých dostávame (pripomíname, že $2b > a > 0$)

$$\frac{R}{2r} = R \cdot \frac{1}{2r} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \cdot \frac{a + 2b}{a\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{b^2}{a(2b - a)}.$$

Nerovnosť $R \geqq 2r$ teda platí práve vtedy, keď $b^2 \geqq a(2b - a)$. Posledná nerovnosť je však ekvivalentná s nerovnosťou $(a - b)^2 \geqq 0$, ktorej platnosť je už zrejmá. Tým je dôkaz nerovnosti $R \geqq 2r$ hotový. Navyše vidíme, že rovnosť v nej nastane jedine v prípade, keď $(a - b)^2 = 0$, čiže $a = b$, teda práve vtedy, keď je pôvodný trojuholník nielen rovnoramenný, ale dokonca rovnostranný.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre všeobecný trojuholník ABC so stranami a, b, c a obsahom S platí pre polomer r vpísanej kružnice vzorec $r = 2S/(a + b + c)$. Dokážte. [Stred M vpísanej kružnice rozdeľuje uvažovaný trojuholník ABC na tri menšie trojuholníky BCM, ACM, ABM o obsahoch $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, ktorých súčet je S, odkiaľ vyplýva dokazovaný vzorec.]

N2. Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ majú vnútorný dotyk v bode B. Určte dĺžky strán trojuholníka ABC, kde bod A je priesečník priamky OB s kružnicou k a bod C je priesečník kružnice k s dotyčnicou z bodu A ku kružnici l. [59–C–S–2]

N3. Kružnica $l(T; s)$ prechádza stredom kružnice $k(S; 2\,\mathrm{cm})$. Kružnica $m(U; t)$ sa zvonku dotýka kružníc k a l, pričom $US \perp ST$. Polomery s a t vyjadrené v centimetroch sú celé čísla. Určte ich. [59–B–II–1]

N4. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC. [58–C–I–2]

N5. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB a obsahom S je opísaná kružnica. Dotyčnica k tejto kružnici v bode C pretína dotyčnice vedené bodmi A a B v bodoch D a E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžky c prepony a obsahu S. [58–C–II–4]

N6. Rovnoramennému lichobežníku $ABCD$ so základňami AB, CD je možné vpísať kružnicu so stredom O. Určte obsah S lichobežníka, ak sú dané dĺžky úsečiek OB a OC. [56–C–II–3]

N7. Kružnice k, l, m sa po dvoch zvonku dotýkajú a všetky tri majú spoločnú dotyčnicu. Polomery kružníc k, l sú 3 cm a 12 cm. Vypočítajte polomer kružnice m. Nájdite všetky riešenia. [55–C–I–2]

N8. Kružnice k, l s vonkajším dotykom ležia obe v obdĺžniku $ABCD$, ktorého obsah je $72\,\mathrm{cm}^2$. Kružnica k sa pritom dotýka strán CD, DA a AB a kružnica l sa dotýka strán AB a BC. Určte polomery kružníc k a l, ak je polomer kružnice k v centimetroch vyjadrený celým číslom. [55–C–II–3]

---

6. *Na hracej ploche $n \times n$ tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou skok na políčko, ktoré je doposiaľ biele, a toto políčko zafarbí namodro. Pritom pod skokom rozumieme bežný ťah šachovým jazdcom, t. j. presun figúrky o dve políčka zvislo alebo vodorovne a súčasne o jedno políčko v druhom smere. Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Postupne pre $n = 4, 5, 6$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky.* (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Ak je celkový počet políčok hracej plochy párny (v zadaní pre $n = 4$ a $n = 6$), môže v poradí druhá hráčka pomýšľať na túto víťaznú stratégiu: spárovať všetky políčka hracej dosky do dvojíc tak, aby v každom páre boli políčka navzájom dosiahnuteľné jedným skokom. Pokiaľ také spárovanie políčok druhá hráčka nájde, má víťaznú stratégiu: v každom ťahu urobí skok na druhé políčko toho páru, na ktorého prvom políčku figúrka práve leží.

Ak je celkový počet políčok hracej plochy nepárny (v zadaní pre $n = 5$), môže v poradí prvá hráčka pomýšľať na túto víťaznú stratégiu: spárovať všetky políčka hracej dosky okrem jedného do dvojíc tak, aby v každom páre boli políčka navzájom dosiahnuteľné jedným skokom. Pokiaľ také spárovanie prvá hráčka nájde, má víťaznú stratégiu: v prvom ťahu položí figúrku na (jediné) nespárované políčko a v každom ďalšom ťahu urobí skok na druhé políčko toho páru, na ktorého prvom políčku figúrka práve leží.

Nájsť požadované spárovania políčok je pre zadané príklady ľahké a je to možné urobiť viacerými spôsobmi. Ukážme tie z nich, ktoré majú určité črty pravidelnosti. Na obr. 3 zľava je vidno, ako je možné spárovať políčka časti hracej plochy o rozmeroch 4×2; celú hraciu plochu 4×4 rozdelíme na dva také bloky a urobíme spárovanie v každom z nich. I na spárovanie políčok hracej plochy 6×6 môžeme využiť spárovanie v dvoch blokoch 4×2; na obr. 3 uprostred je znázornené možné stredovo súmerné spárovanie všetkých políčok. Nakoniec na obr. 3 vpravo je príklad spárovania políčok hracej plochy 5×5 s nespárovaným políčkom v ľavom hornom rohu (nespárované políčko nemusí byť nutne rohové); opäť je pritom využitý jeden blok 4×2.

1	2
3	4
2	1
4	3

1	2	E'	A'	D'	B'
3	4	D'	B'	C'	A'
2	1	C'	E'	$3'$	$4'$
4	3	E	C	$1'$	$2'$
A	C	B	D	$4'$	$3'$
B	D	A	E	$2'$	$1'$

$\bullet$	A	B	C	D
1	2	E	A	B
3	4	C	D	F
2	1	G	E	H
4	3	H	F	G

Obr. 3

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Riešte jednoduchší variant zadanej úlohy, keď povolené *skoky* sú ťahy šachovou vežou, t. j. presuny figúrky v smere riadkov alebo v smere stĺpcov hracej dosky (o ľubovoľný počet políčok). Dokážete objaviť víťaznú stratégiu pre tento variant hry v prípade hracej dosky ľubovoľných rozmerov $m\times n$? [Ak sú obe čísla m a n nepárne, má víťaznú stratégiu prvá hráčka, ak je aspoň jedno z čísel m, n párne, má víťaznú stratégiu druhá hráčka. V oboch prípadoch si uvedená hráčka vopred v duchu rozdelí všetky políčka hracej dosky do dvojíc (v prvom prípade jedno políčko ostane, naň potom hráčka položí figúrku v úvodnom ťahu), a to tak, aby v každom zostavenom páre boli políčka navzájom dosiahnuteľné jedným skokom (pre ťahy vežou je to ľahké, stačí párovať len susedné políčka riadku alebo stĺpca); v priebehu hry potom táto hráčka môže vždy skočiť z jedného políčka na druhé políčko toho istého páru, takže vyhrá.]

N2. Na tabuli sú napísané všetky prvočísla menšie ako 100. Gitka a Terka sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najprv Gitka zmaže jedno z prvočísel. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zmaže jedno z prvočísel, ktoré má s predchádzajúcim zmazaným prvočíslom jednu zhodnú číslicu (tak po prvočísle 3 je možné zmazať trebárs 13 alebo 37). Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne prvočíslo zmazať, prehráva. Ktorá z oboch hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle od ťahov súperky? [Pretože prvočísel menších ako 100 je nepárny počet (25), ponúka sa hypotéza, že víťaznú stratégiu bude mať prvá hráčka. Ukážme, že to tak naozaj je. Táto hráčka si vopred v duchu spáruje (podľa spoločnej číslice) napísané prvočísla (dá sa to urobiť viacerými spôsobmi, uvedieme ten, pri ktorom v každom kroku párujeme najmenšie doposiaľ nespárované prvočíslo s najmenším ďalším doposiaľ nespárovaným prvočíslom so spoločnou číslicou): $(2, 23)$,

$(3, 13)$, $(5, 53)$, $(7, 17)$, $(11, 19)$, $(29, 59)$, $(31, 37)$, $(41, 43)$, $(47, 67)$, $(61, 71)$, $(73, 79)$, $(83, 89)$; jediné zostávajúce nespárované prvočíslo 97 preto Gitka zmaže ako prvé a ďalej pri hre bude mazať vždy prvočíslo, ktoré je v páre s predchádzajúcim zmazaným prvočíslom. Týmto postupom musí vyhrať.]

N3. Dve hráčky majú k dispozícii pre hru, ktorú opíšeme, neobmedzený počet dvadsaťcentových mincí a stôl s kruhovou doskou s priemerom 1 meter. Hra prebieha tak, že sa hráčky pravidelne striedajú v ťahoch. Najprv prvá hráčka položí jednu mincu kamkoľvek na prázdny stôl. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, položí na voľnú časť stola ďalšiu mincu (tak, aby nepresahovala okraj stola a aby sa skôr položených mincí nanajvýš dotýkala). Ktorá z oboch hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle od ťahov súperky? [Víťaznú stratégiu má prvá hráčka: prvú mincu položí doprostred stola a v každom ďalšom kroku položí mincu na miesto súmerne združené podľa stredu stola s miestom práve položenej mince.]

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	1. Jaromír Šimša, 2. Pavel Leischner, 3. Tomáš Jurík, 4. Ján Mazák, 5. Leo Boček, 6. Pavel Calábek
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Pavel Novotný, Jaromír Šimša
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012