

2011/2012
61. ročník MO

Zadania úloh školského kola kategórie C

(Súťaž sa konala vo štvrtok 26. januára 2012.)

1. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b , pre ktoré platí rovnosť množín

$$\{a \cdot [a, b], b \cdot (a, b)\} = \{45, 180\},$$

pričom (x, y) označuje najväčší spoločný deliteľ a $[x, y]$ najmenší spoločný násobok čísel x a y .
(Tomáš Jurík)

2. Označme S stred základne AB daného rovnoramenného trojuholníka ABC . Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom ACS , BCS sa dotýkajú priamky AB v bodoch, ktoré delia základňu AB na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer $|AB| : |CS|$.
(Jaromír Šimša)

3. Reálne čísla p, q, r, s splňajú rovnosti

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 4 \quad \text{a} \quad pq + rs = 1.$$

Dokážte, že niektoré dve z týchto štyroch čísel sa líšia najviac o 1 a niektoré dve sa líšia najmenej o 1.
(Jaromír Šimša)