61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

1. *V obore celých čísel vyriešte rovnicu*

$$x^2 + y^2 + x + y = 4.$$

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Vynásobením oboch strán danej rovnice štyrmi dostaneme

$$4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y = 16.$$

Výraz na ľavej strane takto upravenej rovnice doplníme na súčet druhých mocnín dvoch dvojčlenov. Obdržíme tak

$$(4x^2 + 4x + 1) + (4y^2 + 4y + 1) = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 = 18.$$

Stačí teda vyšetriť všetky rozklady čísla 18 na súčet dvoch kladných nepárnych čísel, pretože čísla $2x + 1$ a $2y + 1$ nie sú deliteľné dvoma pre žiadne celé x a y.

Uvažujme preto nasledujúce rozklady:

$$18 = 1 + 17 = 3 + 15 = 5 + 13 = 7 + 11 = 9 + 9.$$

Medzi uvedenými súčtami je iba jeden ($18 = 9 + 9$) súčtom druhých mocnín dvoch celých čísel. Môžu teda nastať nasledujúce štyri prípady:

$$\begin{aligned}
&2x + 1 = 3, && 2y + 1 = 3, && \text{t. j. } x = 1, && y = 1,\\
&2x + 1 = 3, && 2y + 1 = -3, && \text{t. j. } x = 1, && y = -2,\\
&2x + 1 = -3, && 2y + 1 = 3, && \text{t. j. } x = -2, && y = 1,\\
&2x + 1 = -3, && 2y + 1 = -3, && \text{t. j. } x = -2, && y = -2.
\end{aligned}$$

Záver. Danej rovnici vyhovujú práve štyri dvojice celých čísel (x, y), a to $(1, 1)$, $(1, -2)$, $(-2, 1)$ a $(-2, -2)$.

Iné riešenie. Danú rovnicu možno upraviť na tvar $x(x + 1) + y(y + 1) = 4$, z ktorého vidno, že číslo 4 je nutné rozložiť na súčet dvoch celých čísel, z ktorých každé je súčinom dvoch po sebe idúcich celých čísel. Keďže najmenšie hodnoty výrazu $t(t+1)$ pre kladné aj záporné celé t sú $0, 2, 6, 12, \ldots$, do úvahy prichádza iba rozklad $4 = 2 + 2$, takže každá z neznámych x, y sa rovná jednému z čísel 1 či -2 – jediných celých čísel t, pre ktoré $t(t+1) = 2$. Navyše je jasné, že naopak každá zo štyroch dvojíc (x, y) zostavených z čísel 1, -2 je riešením danej úlohy.

Za systematické a úplné riešenie dajte 6 bodov. Za uhádnutie len jednej dvojice (x, y), ktorá je riešením, nedávajte žiadny bod, za ďalšie jedno uhádnuté riešenie dajte 1 bod, za uhádnutie všetkých štyroch riešení dajte 2 body. Pri správnom postupe naopak strhnite 1 bod za každé chýbajúce riešenie. Jednoznačnosť rozkladu čísla 18 na súčet dvoch druhých mocnín je natoľko zrejmá, že ju nie je nutné zdôvodňovať (ako v tu uvedenom riešení).

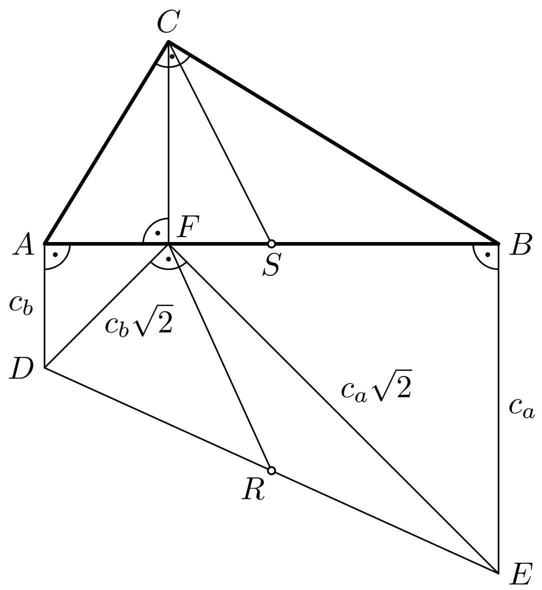
2. *Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Nech F je päta výšky z vrcholu C na preponu AB. Na kolmiciach na priamku AB, ktoré prechádzajú vrcholmi A a B, sú v polrovine opačnej k polrovine ABC zvolené postupne body D a E, pre ktoré platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Označme ďalej R stred úsečky DE. Dokážte, že platí nerovnosť $|RF| \geqq |CF|$ a zistite, kedy nastane rovnosť.*

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Keďže DAF a EBF sú pravouhlé rovnoramenné trojuholníky, majú uhly pri ich preponách veľkosť 45°, takže trojuholník DEF je pravouhlý. Označme S stred úsečky AB (obr. 1). Keďže stred prepony pravouhlého trojuholníka je zároveň stredom jeho opísanej kružnice, zrejme platí $|RF| = \frac{1}{2}|DE|$ a $|CS| = \frac{1}{2}|AB|$. Pritom AD a BE sú dve rovnobežné priamky, ktorých vzdialenosť je rovná $|AB|$, a preto $|DE| \geqq |AB|$. Platí teda

$$|RF| = \frac{1}{2}|DE| \geqq \frac{1}{2}|AB| = |CS| \geqq |CF|,$$

čo sme chceli dokázať.



Obr. 1

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $|DE| = |AB|$ a $|CS| = |CF|$, teda práve vtedy, keď $S = F$ (potom je aj $|AD| = |AS| = |BS| = |BE|$ a $|DE| = |AB|$), čiže práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnoramenný.

Iné riešenie. Označme $c_a = |BF|$ a $c_b = |AF|$. Vzhľadom na to, že $|AD| = c_b$ a $|BE| = c_a$ (obr. 1), vidíme, že pre dĺžku prepony DE v pravouhlom trojuholníku DEF (poz. riešenie 2. úlohy domáceho kola) dostaneme použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom pre dvojicu kladných čísel c_a^2 a c_b^2 a ďalej použitím Euklidovej vety o výške CF v pravouhlom trojuholníku ABC odhad

$$|DE| = \sqrt{2(c_a^2 + c_b^2)} \geqq \sqrt{2 \cdot 2c_a c_b} = 2\sqrt{c_a c_b} = 2|CF|.$$

Keďže v pravouhlom trojuholníku DEF platí $|RF| = \frac{1}{2}|DE|$, dostávame využitím uvedenej nerovnosti

$$2|RF| = |DE| \geqq 2|CF| \quad \text{a odtiaľ} \quad |RF| \geqq |CF|,$$

čo sme chceli dokázať.

Rovnosť nastane práve vtedy, keď sa obe priemerované hodnoty c_a^2 a c_b^2 rovnajú, t. j. keď platí $c_a = c_b$, čo nastane práve v prípade pravouhlého rovnoramenného trojuholníka ABC.

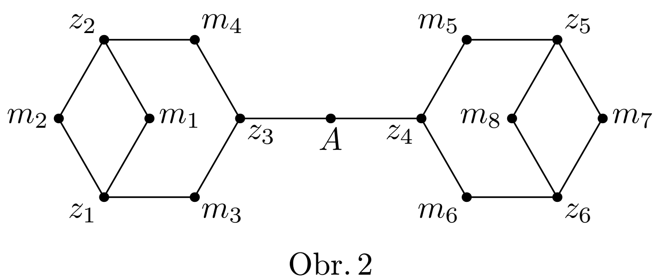
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za vynechanie podmienky, kedy nastane rovnosť, strhnite 2 body. Len za uhádnutie, kedy nastane rovnosť, dajte 1 bod.

---

3. *V istom meste majú vybudovanú súvislú sieť na šírenie klebiet (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). V nej si každý klebetník vymieňa informácie s dvoma klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s troma klebetníkmi. Predpokladajme, že v uvedenej sieti sa nájde taký muž aj taká žena, že po prípadnom odsťahovaní ktorejkoľvek z týchto dvoch osôb prestane byť sieť súvislou. Nájdite najmenší možný počet členov tejto siete.* (Pavel Calábek)

Riešenie. Označme A toho klebetníka, po ktorého odsťahovaní sa sieť rozpadne, a M_1, Z_1 počty klebetníkov a klebetníc v jednej oddelenej skupine, M_2 a Z_2 v druhej. Keďže v každej skupine existuje aspoň jedna klebetnica a tá je ešte stále v spojení s aspoň dvoma klebetníkmi, je $M_1 \geqq 2$ a $M_2 \geqq 2$. V každej skupine medzi počtami klebetníc a klebetníkov platia teraz vzťahy $3Z_1 - 1 = 2M_1$ a $3Z_2 - 1 = 2M_2$. Rovnica tvaru $3z - 1 = 2m$ nemá celočíselné riešenie z ani pre $m = 2$, ani pre $m = 3$, až pre $m = 4$ vychádza celé $z = 3$. Najmenší možný počet členov siete tak môže byť $M_1 = M_2 = 4$, $Z_1 = Z_2 = 3$.

Takú sieť ľahko zostrojíme podľa obr. 2, v ktorom z_i sú klebetnice a m_i klebetníci.



Obr. 2

Zároveň vidíme, že uvedená sieť sa stane nesúvislou po odsťahovaní jednej z klebetníc z_3 či z_4. Najmenší počet členov siete s požadovanou vlastnosťou je preto 15.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak bude nájdený len minimálny odhad $Z_1 = Z_2 = 3$, $M_1 = M_2 = 4$ a nebude uvedená konkrétna konfigurácia, dajte 4 body. Ak bude nájdená iba konkrétna konfigurácia s 15 členmi a nebude dokázané, že menší počet členov siete byť nemôže, dajte len 2 body.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava: Peter Novotný, Jaroslav Zhouf
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012