61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

1. *Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí rovnosť množín*

$$\{a\cdot[a,b],\ b\cdot(a,b)\}=\{45,180\},$$

pričom (x,y) označuje najväčší spoločný deliteľ a $[x,y]$ najmenší spoločný násobok čísel x a y. (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Z danej rovnosti vyplýva, že číslo b je nepárne (inak by obe čísla naľavo boli párne), a teda číslo a je párne (inak by obe čísla naľavo boli nepárne). Rovnosť množín preto musí byť splnená nasledovne:

$$a\cdot[a,b]=180 \quad \text{a} \quad b\cdot(a,b)=45. \tag{1}$$

Keďže číslo a delí číslo $[a,b]$, je číslo $180=2^2\cdot3^2\cdot5$ deliteľné druhou mocninou (párneho) čísla a, takže musí platiť buď $a=2$, alebo $a=6$. V prípade $a=2$ (vzhľadom na to, že b je nepárne) platí

$$a\cdot[a,b]=2\cdot[2,b]=2\cdot2b=4b,$$

čo znamená, že prvá rovnosť v (1) je splnená jedine pre $b=45$. Vtedy $b\cdot(a,b)=45\cdot\cdot(2,45)=45$, takže je splnená aj druhá rovnosť v (1), a preto dvojica $a=2$, $b=45$ je riešením úlohy.

V prípade $a=6$ podobne dostaneme

$$a\cdot[a,b]=6\cdot[6,b]=6\cdot2\cdot[3,b]=12\cdot[3,b],$$

čo znamená, že prvá rovnosť v (1) je splnená práve vtedy, keď $[3,b]=15$. Tomu vyhovujú jedine hodnoty $b=5$ a $b=15$. Z nich však iba hodnota $b=15$ spĺňa druhú rovnosť v (1), ktorá je teraz v tvare $b\cdot(6,b)=45$. Druhým riešením úlohy je teda dvojica $a=6$, $b=15$, žiadne ďalšie riešenia neexistujú.

Odpoveď. Hľadané dvojice sú dve, a to $a=2$, $b=45$ a $a=6$, $b=15$.

Iné riešenie. Označme $d=(a,b)$. Potom $a=ud$ a $b=vd$, pričom u, v sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, takže $[a,b]=uvd$. Z rovností

$$a\cdot[a,b]=ud\cdot uvd=u^2vd^2 \quad \text{a} \quad b\cdot(a,b)=vd\cdot d=vd^2$$

vidíme, že číslo $a\cdot[a,b]$ je u^2-násobkom čísla $b\cdot(a,b)$, takže zadaná rovnosť množín môže byť splnená jedine tak, ako sme zapísali vzťahmi (1) v prvom riešení. Tie teraz môžeme vyjadriť rovnosťami

$$u^2vd^2=180 \quad \text{a} \quad vd^2=45.$$

Preto platí $u^2=\frac{180}{45}=4$, čiže $u=2$. Z rovnosti $vd^2=45=3^2\cdot5$ vyplýva, že buď $d=1$ (a $v=45$), alebo $d=3$ (a $v=5$). V prvom prípade $a=ud=2\cdot1=2$ a $b=vd=45\cdot\cdot1=45$, v druhom $a=ud=2\cdot3=6$ a $b=vd=5\cdot3=15$.

Poznámka. Keďže zo zadanej rovnosti okamžite vyplýva, že obe čísla a, b sú deliteľmi čísla 180 (takým deliteľom je dokonca aj ich najmenší spoločný násobok $[a,b]$), je možné úlohu vyriešiť rôznymi inými cestami, založenými na testovaní konečného počtu dvojíc konkrétnych čísel a a b. Takýto postup urýchlime, keď vopred zistíme niektoré nutné podmienky, ktoré musia čísla a, b spĺňať. Napríklad spresnenie rovnosti množín na dvojicu rovností (1) možno (aj bez použitia úvahy o parite čísel a, b) vysvetliť všeobecným postrehom: súčin $a \cdot [a,b]$ je *vždy* deliteľný súčinom $b \cdot (a,b)$, pretože ich podiel možno zapísať v tvare

$$\frac{a \cdot [a,b]}{b \cdot (a,b)} = \frac{a}{(a,b)} \cdot \frac{[a,b]}{b},$$

teda ako súčin dvoch *celých* čísel.

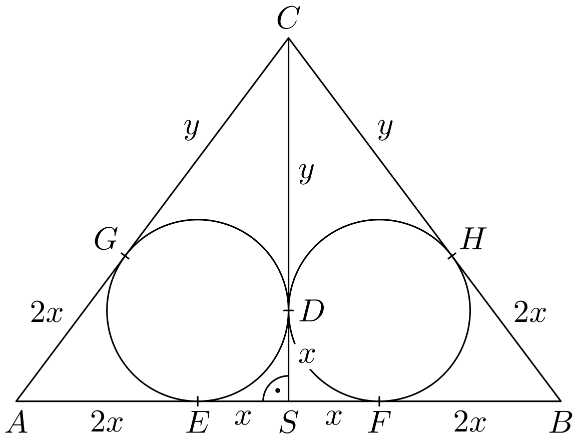
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak chýba zdôvodnenie rovností (1) v inak úplnom riešení (argumenty $(a,b) < [a,b]$ či $(a,b) \mid [a,b]$ samotné nestačia; stačí však napr. argument $a \geqq (a,b)$ a $[a,b] \geqq b$), strhnite 1 bod. Za nájdenie oboch vyhovujúcich dvojíc (napríklad uhádnutím) dajte 1 bod, ďalšie body potom podľa kvality podaného postupu hľadania, hlavne jeho systematickosti.

---

2. *Označme S stred základne AB daného rovnoramenného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom ACS, BCS sa dotýkajú priamky AB v bodoch, ktoré delia základňu AB na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer $|AB| : |CS|$.*

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Vďaka súmernosti podľa priamky CS sa obe vpísané kružnice dotýkajú výšky CS v rovnakom bode, ktorý označíme D. Body dotyku týchto kružníc s úsečkami AS, BS, AC, BC označíme postupne E, F, G, H (obr. 1). Pre vyjadrenie všetkých potrebných dĺžok ešte zavedieme označenie $x = |SD|$ a $y = |CD|$.



Obr. 1

Vzhľadom na symetriu dotyčníc z daného bodu k danej kružnici platia rovnosti

$$|SD| = |SE| = |SF| = x \quad \text{a} \quad |CD| = |CG| = |CH| = y.$$

Úsečka EF má preto dĺžku $2x$, ktorá je podľa zadania zároveň dĺžkou úsečiek AE a BF, a teda aj dĺžkou úsečiek AG a BH (opäť vďaka symetrii dotyčníc). Odtiaľ už bezprostredne vyplývajú rovnosti

$$|AB| = 6x, \quad |AC| = |BC| = 2x + y \quad \text{a} \quad |CS| = x + y.$$

Závislosť medzi dĺžkami x a y zistíme použitím Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník ACS (s odvesnou AS dĺžky $3x$):

$$(2x + y)^2 = (3x)^2 + (x + y)^2.$$

Roznásobením a ďalšími úpravami odtiaľ dostaneme (x a y sú kladné hodnoty)

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + y^2 &= 9x^2 + x^2 + 2xy + y^2,\\ 2xy &= 6x^2,\\ y &= 3x. \end{aligned}$$

Hľadaný pomer tak má hodnotu

$$|AB| : |CS| = 6x : (x + y) = 6x : 4x = 3 : 2.$$

Poznamenajme, že prakticky rovnaký postup celého riešenia možno zapísať aj pri štandardnom označení $c = |AB|$ a $v = |CS|$. Keďže podľa zadania platí $|AE| = \frac{1}{3}c$, a teda $|SE| = \frac{1}{6}c$, z rovnosti $|SD| = |SE|$ vyplýva $|CD| = |CS| - |SD| = v - \frac{1}{6}c$, odkiaľ

$$|AC| = |AG| + |CG| = |AE| + |CD| = \tfrac{1}{3}c + (v - \tfrac{1}{6}c) = v + \tfrac{1}{6}c,$$

takže z Pytagorovej vety pre trojuholník ACS,

$$(v + \tfrac{1}{6}c)^2 = (\tfrac{1}{2}c)^2 + v^2,$$

vychádza $3v = 2c$, čiže $c : v = 3 : 2$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za vyjadrenie potrebných dĺžok pomocou dvoch parametrov (napr. x, y alebo c, v) dajte 3 body, ďalšie 2 body pridajte za efektívne využitie Pytagorovej vety a 1 bod za konečné určenie hľadaného pomeru.

---

3. *Reálne čísla p, q, r, s spĺňajú rovnosti*

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 4 \qquad \text{a} \qquad pq + rs = 1.$$

Dokážte, že niektoré dve z týchto štyroch čísel sa líšia najviac o 1 a niektoré dve sa líšia najmenej o 1. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Druhá zo zadaných rovníc napovedá, že by sme mali skúmať odchýlky čísel v dvojiciach p, q a r, s. Pre súčet druhých mocnín týchto odchýlok platí

$$(p - q)^2 + (r - s)^2 = \left(p^2 + q^2 + r^2 + s^2\right) - 2(pq + rs) = 4 - 2 \cdot 1 = 2.$$

Avšak ak je súčet dvoch reálnych čísel rovný číslu 2, nemôžu byť oba sčítance ani väčšie ako 1, ani menšie ako 1. Jedno z čísel $(p - q)^2$, $(r - s)^2$ je teda najviac 1 a jedno je najmenej 1. To isté potom platí aj o číslach $|p - q|$ a $|r - s|$, čo sme chceli dokázať.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Určenie súčtu $(p - q)^2 + (r - s)^2$ ohodnoťte 4 bodmi. Ak riešiteľ pri správnej úvahe urobí záver o číslach $p - q$ a $r - s$ bez absolútnych hodnôt (a nepodotkne pritom, že možno bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $p \geqq q$ a $r \geqq s$), strhnite 1 bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Jaromír Šimša

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012