2007/2008
57. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 24. – 30. 4. 2008.*)

1. Body v rovine s celočíselnými súradnicami sú ofarbené troma farbami, pričom každá farba je použitá aspoň raz. Dokážte, že vieme nájsť pravouhlý trojuholník, ktorého vrcholy majú celočíselné súradnice a sú rôznych farieb.

2. Nájdite všetky štvorice k, l, m, n prirodzených čísel, ktoré spĺňajú

$$(1 + n^k)^l = 1 + n^m.$$

3. V trojuholníku ABC označme P priesečník osi uhla BAC so stranou BC a Q priesečník osi uhla ABC so stranou AC. Označme M priesečník osi uhla BAC a kružnice opísanej trojuholníku ABC (rôzny od A) a N priesečník osi uhla ABC a kružnice opísanej ABC (rôzny od B). Ďalej na priamke AB zvoľme body D, E tak, aby D ležal na polpriamke opačnej k AB a E na polpriamke opačnej k BA a zároveň $|AD| = |AC|$ a $|BE| = |BC|$. Ďalej nech U je stred kružnice opísanej trojuholníku BEM a V je stred kružnice opísanej trojuholníku ADN. Označme X priesečník AU a BV. Ukážte, že CX je kolmá na PQ.

4. Máme daných päť reálnych čísel. Urobíme rozdiel súčtu ľubovoľných troch z nich a súčtu zvyšných dvoch. Tento rozdiel je vždy kladné číslo. Dokážte, že súčin všetkých takýchto desiatich rozdielov je nanajvýš súčin druhých mocnín týchto piatich čísel.

5. Nech b, n sú prirodzené čísla väčšie ako 1. Pre každé $k > 1$ existuje celé číslo a_k také, že $b - a_k^n$ je deliteľné číslom k. Dokážte, že b je n-tou mocninou celého čísla.

6. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC. Bod M je stredom strany BC. Nech X je bod na kratšom oblúku MA kružnice opísanej trojuholníku ABM. Nech T je bod v časti roviny určenej uhlom BMA taký, že $|\measuredangle TMX| = 90°$ a $|TX| = |BX|$. Dokážte, že $|\measuredangle MTB| - |\measuredangle CTM|$ nezáleží na voľbe bodu X.

7. Majme $3n$ čísel, označme ich $a_1, a_2, \dots, a_{3n}$. Po *pozoruhodnom* premiešaní budú čísla v poradí

$$a_3, a_6, \dots, a_{3n}, a_2, a_5, \dots, a_{3n-1}, a_1, a_4, \dots, a_{3n-2}.$$

Začnime s číslami $1, 2, 3, \dots, 192$. Môžeme po konečnom počte pozoruhodných premiešaní dostať čísla v poradí $192, 191, 190, \dots, 1$?

8. Uhlopriečky daného lichobežníka $ABCD$ sa pretínajú v bode P. Bod Q leží medzi rovnobežnými priamkami BC a AD tak, že $|\measuredangle AQD| = |\measuredangle CQB|$ a body P a Q ležia v opačných polrovinách určených priamkou CD. Dokážte, že $|\measuredangle BQP| = |\measuredangle DAQ|$.

9. Nech S je konečná množina bodov v rovine takých, že žiadne tri z nich neležia na jednej priamke. Pre každý konvexný mnohouholník P, ktorého vrcholy patria do S, nech $a(P)$ je počet jeho vrcholov a nech $b(P)$ je počet bodov z S ležiacich zvonku P. Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí

$$\sum_P x^{a(P)}(1 - x)^{b(P)} = 1,$$

kde suma sa berie cez všetky konvexné mnohouholníky s vrcholmi v S.
Poznámka. Úsečka, bod a prázdna množina sa považujú za konvexný dvoj-, jedno- a nulauholník.

10. V trojuholníku ABC platí $|\measuredangle ACB| < |\measuredangle BAC| < \pi/2$ a bod D leží na strane AC tak, že $|BD| = |BA|$. Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strany AB v bode K a strany AC v bode L. Bod J je stred kružnice vpísanej trojuholníku BCD. Dokážte, že priamka KL rozpoľuje úsečku AJ.

11. Uvažujme funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vyhovujúce podmienke

$$f(m+n) \geqq f(m) + f(f(n)) - 1$$

pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$. Nájdite všetky možné hodnoty $f(2007)$.

12. Nech $ABCD$ je rovnobežník, pričom žiadny z jeho vnútorných uhlov nemá veľkosť $60°$. Nájdite všetky dvojice bodov E a F také, že trojuholníky AEB a BFC sú rovnoramenné so základňami AB a BC a trojuholník DEF je rovnostranný.

13. Vo vrcholoch konvexného mnohouholníka s párnym počtom strán sedia poľovníci. Vnútri mnohouholníka mimo jeho uhlopriečok sa nachádza líška. Poľovníci naraz vystrelia smerom na líšku, ale líška sa uhne a guľky z pušiek letia ďalej a preletia cez strany mnohouholníka. Dokážte, že aspoň jednu stranu netrafí žiadna guľka.

14. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, ktoré pre všetky racionálne čísla x a y spĺňajú nerovnosť

$$|f(x) - f(y)| \leqq (x-y)^2.$$

15. Nech P je množina všetkých prvočísel. Nech M je podmnožina množiny P, ktorá má aspoň tri prvky a navyše pre každú vlastnú konečnú podmnožinu A množiny M patria všetky prvočísla z prvočíselného rozkladu čísla

$$-1 + \prod_{p \in A} p$$

do množiny M. Dokážte, že $M = P$.

16. Polynóm P nepárneho stupňa spĺňa pre každé reálne číslo x rovnosť

$$P(x^2 - 1) = P(x)^2 - 1.$$

Dokážte, že $P(x) = x$ pre každé reálne číslo x.

17. Nech X je množina 10 000 rôznych celých čísel, z ktorých žiadne nie je deliteľné číslom 47. Dokážte, že existuje jej 2008-prvková podmnožina Y taká, že číslo $a-b+c-d+e$ nie je deliteľné číslom 47 pre žiadnu päticu (nie nutne rôznych) čísel $a, b, c, d, e \in Y$.

18. Daný je trojuholník ABC. Kružnica pripísaná ku strane BC má stred J a dotýka sa strany BC v bode A_1 a priamok AC, AB postupne v bodoch B_1, C_1. Predpokladajme, že priamky A_1B_1 a AB sú navzájom kolmé a pretínajú sa v bode D. Nech E je päta kolmice spustenej z bodu C_1 na priamku DJ. Určte veľkosti uhlov BEA_1 a AEB_1.