2022/2023
72. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov*

(*Súťaž sa konala 14. – 17. 5. 2023.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Nech ABC je trojuholník, ktorý spĺňa $|BC| = 2|AC|$. Nech M je stred strany BC a D je taký bod úsečky AB, pre ktorý platí $|AD| = 2|BD|$. Dokážte $AM \perp MD$. (*Patrik Bak*)

I-2. Pre kladné celé číslo n označíme $d(n)$ počet kladných deliteľov čísla n. Nájdite všetky kladné celé čísla n také, že $d(n)$ je druhý najväčší deliteľ n. (*Zdeněk Pezlar*)

I-3. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech P je bod vnútri ABC ležiaci na osi uhla BAC. Predpokladajme, že ortocentrum H trojuholníka ABP leží vnútri ABC. Označme Q priesečník kolmice z H na AC s AP. Dokážte, že P a Q sú osovo súmerné podľa osi BH. (*Patrik Bak*)

I-4. Každé políčko tabuľky $n \times n$ je modré alebo červené. Predpokladajme, že sú splnené nasledujúce podmienky:
- Ak riadok a stĺpec obsahujú rovnaký počet červených políčok, tak políčko na ich prieniku je červené.
- Ak riadok a stĺpec obsahujú rôzny počet červených políčok, tak políčko na ich prieniku je modré.

Dokážte, že v celej tabuľke je párny počet modrých políčok. (*Poľsko*)

I-5. Martin vykonáva aritmetickú operáciu na zlomkoch. V každom ťahu zvýši posledný výsledok o jeho prevrátenú hodnotu, čím dostane nový výsledok. Martin začína číslom 1, po prvom ťahu preto dostane 2, po druhom ťahu $\frac{5}{2}$, potom $\frac{29}{10}$ atď. Po 300 ťahoch dostane číslo x. Nájdite najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x. (*Poľsko*)

Súťaž družstiev:

T-1. Označme $S(n)$ součet všech číslic přirozeného čísla n. Určete všechna přirozená čísla n, pro která jsou obě čísla $n + S(n)$ a $n - S(n)$ druhými mocninami nenulových celých čísel. (*Poľsko*)

T-2. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 2023$ v tomto pořadí. Můžeme s nimi opakovaně provádět následující operaci: Vybereme libovolný lichý počet po sobě napsaných čísel a tato čísla zapíšeme v obráceném pořadí. Kolik různých pořadí těchto 2023 čísel tak můžeme dostat?

Příklad: Pokud začneme pouze s čísly $1, 2, 3, 4, 5, 6$, můžeme provádět následující kroky

$$\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, 5, 6 \to 3, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6} \to 3, 6, \mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{1}, 2 \to 3, 6, 1, 4, 5, 2 \to \ldots$$

(*Eliška Macáková*)

T-3. Na przyjęciu spotkało się n osób, przy czym $n \geqq 2$. Każda osoba nie lubi dokładnie jednej innej osoby obecnej na przyjęciu (ale niekoniecznie ze wzajemnością, tzn. może się zdarzyć, że A lub B pomimo, że B nie lubi A) i lubi wszystkie pozostałe. Wykaż, że gości można usadzić przy trzech stołach w taki sposób, aby każdy gość lubił wszystkie osoby przy swoim stole. (*Poľsko*)

T-4. W trójkącie ABC punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i AC. Dwusieczne kątów wewnętrznych ABC oraz BCA przecinają prostą MN odpowienio w punktach P i Q. Niech p będzie styczną do okręgu opisanego na trójkącie AMP przechodzącą przez punkt P, a q będzie styczną do okręgu opisanego na trójkącie ANQ przechodzącą przez punkt Q. Wykaż, że proste p i q przecinają się na prostej BC.

(*Michal Pecho*)

T-5. Mazo vykonáva nasledujúcu operáciu na trojiciach nezáporných celých čísel: Ak aspoň jedno z nich je kladné, tak si vyberie jedno kladné číslo, zmenší ho o jedna a ostatným dvom číslam vymení cifry na mieste jednotiek. Začína s trojicou x, y, z. Nájdite trojicu kladných celých čísel x, y, z takých, že $xy + yz + zx = 1000$ $(*)$ a počet operácii, ktoré môže Mazo následne s trojicou x, y, z vykonať je

(a) maximálny (t. j. neexistuje trojica kladných celých čísel spĺňajúca $(*)$, ktorá by mu dovolila urobiť viac operácii);

(b) minimálny (t. j. každá trojica kladných celých čísel spĺňajúca $(*)$ mu dovolí vykonať aspoň toľko operácií).

(*Ján Mazák*)

T-6. Daný je obdĺžnik $ABCD$. Body E a F ležia postupne na stranách BC a CD tak, že obsah trojuholníkov ABE, ECF, FDA je rovný 1. Určte obsah trojuholníka AEF.

(*Poľsko*)