MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

skmo.sk

2022/2023
72. ročník MO *Zadania úloh CAPS*

(*Súťaž sa konala 18. – 21. 6. 2023.*)

1. Dané je celé číslo $n \geqq 3$. Nájdite najmenšie kladné celé číslo k také, že ľubovoľné dva body v ľubovoľnom n-uholníku (alebo na jeho hranici) v rovine možno spojiť lomenou čiarou skladajúcou sa z práve k úsečiek, ktoré sú celé obsiahnuté v danom n-uholníku (alebo na jeho hranici). (*David Hruška, Česká rep.*)

2. Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú také reálne čísla, že pre každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí nerovnosť

$$n \cdot a_k \geqq \sum_{i=1}^{k} a_i^2.$$

Dokážte, že existuje aspoň $n/10$ indexov k takých, že $a_k \leqq 1000$.
(*Sándor Kisfaludi-Bak, Karol Węgrzycki, Poľsko*)

3. Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$, v ktorom platí $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle BCD|$ a $|\measuredangle ABC| < |\measuredangle ADC|$. Bod M je stredom úsečky AC. Dokážte, že na úsečkách AB a BC existujú postupne body X a Y také, že $XY \perp BD$, $|MX| = |MY|$ a $|\measuredangle XMY| = |\measuredangle ADC| - |\measuredangle ABC|$. (*Mykhailo Shtandenko, Ukrajina*)

4. Nech p, q a r sú kladné reálne čísla také, že rovnica

$$\lfloor pn \rfloor + \lfloor qn \rfloor + \lfloor rn \rfloor = n$$

je splnená pre nekonečne veľa kladných celých čísel n.

a) Dokážte, že p, q a r sú racionálne čísla.

b) Nájdite počet kladných celých čísel c takých, že existujú kladné celé čísla a, b, pre ktoré je rovnica

$$\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{cn}{202} \right\rfloor = n$$

splnená pre nekonečne veľa kladných celých čísel n.

(*Walther Janous, Rakúsko*)

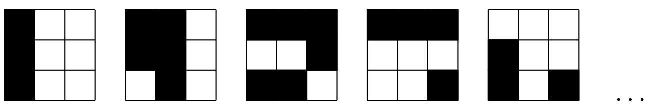
5. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s ortocentrom H. Označme D pätu výšky z bodu A na stranu BC. Nech T je taký bod na kružnici s priemerom AH, že táto kružnica má vnútorný dotyk s kružnicou opísanou trojuholníku BDT. Napokon označme N stred úsečky AH. Dokážte, že $BT \perp CN$.
(*Michal Pecho, Slovensko*)

6. Dané je kladné celé číslo n. Majme tabuľku $n \times n$, ktorej všetky políčka sú na začiatku biele. Maliar Piet sa prechádza po tabuľke a prefarbuje navštívené políčka podľa nasledovných pravidiel. Piet začína každú *prechádzku* v ľavom dolnom rohu tabuľky a pokračuje nasledovne:

- ak stojí na bielom políčku, prefarbí ho načierno a pohne sa o jedno políčko nahor (alebo vyjde z tabuľky, ak stojí na políčku v hornom riadku);
- ak stojí na čiernom políčku, prefarbí ho nabielo a pohne sa o jedno políčko doprava (alebo vyjde z tabuľky, ak stojí na políčku v stĺpci úplne napravo).

Pietova prechádzka sa skončí, keď vyjde z tabuľky. Nájdite najmenšie kladné celé číslo s s nasledujúcou vlastnosťou: po *presne* s prechádzkach sú všetky políčka tabuľky opäť biele.

Napríklad pre $n = 3$ sú príslušné stavy tabuľky po prvých piatich prechádzkach ako na obr. 1.



Obr. 1

(*Łukasz Bożyk*)