2006/2007
56. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(Sústredenie sa konalo 10. – 16. 4. 2007.)

1. Označme A_n počet permutácií $a_1, a_2, \dots, a_n$ čísel $1, 2, \dots, n$ takých, že pre všetky $k = 1, 2, \dots, n$ je $|a_k - k|$ rovné 0, 1 alebo 2. Dokážte, že pre $n \geqq 6$ platí

$$A_n = 2A_{n-1} + 2A_{n-3} - A_{n-5}.$$

2. Dokážte, že ak a, b, c, d sú kladné reálne čísla spĺňajúce nerovnosť

$$\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2 > 3\left(a^4 + b^4 + c^4 + d^4\right),$$

tak ľubovoľná trojica z čísel a, b, c, d môže byť dĺžkami strán trojuholníka.

3. Trojuholník ABC je vpísaný do kružnice Ω. Nech M_1, M_2, M_3 sú postupne stredy strán BC, CA, AC a T_1, T_2, T_3 sú stredy oblúkov BC, CA, AB na kružnici Ω, ktoré neobsahujú protiľahlý vrchol. Pre $i = 1, 2, 3$ nech ω_i je kružnica s priemerom M_iT_i a p_i je spoločná vonkajšia dotyčnica kružníc ω_j, ω_k ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) taká, že ω_i leží na opačnej strane priamky p_i ako ω_j a ω_k. Dokážte, že priamky p_1, p_2, p_3 vytvárajú trojuholník podobný s ABC a nájdite pomer podobnosti.

4. Vnútri strany BC ostrouhlého trojuholníka ABC leží bod D. Body P a Q sú stredmi kružníc opísaných trojuholníkom ABD a ACD. Dokážte, že existuje bod M rôzny od bodu A taký, že ním prechádzajú všetky kružnice opísané všetkým možným trojuholníkom APQ (trojuholník ABC je pevný a bod D sa pohybuje po strane BC).

5. Prirodzené číslo N sa dá napísať v tvare $a^2 + b^2 + c^2$, kde a, b, c sú celé čísla deliteľné tromi. Dokážte, že sa dá napísať aj v tvare $x^2 + y^2 + z^2$, kde x, y, z sú celé čísla, z ktorých žiadne nie je deliteľné tromi.

6. V tabuľke 300×300 je N políčok zafarbených čiernou farbou, ostatné sú biele. Žiadne tri čierne políčka netvoria roh (t. j. útvar , ľubovoľne otočený). Keď však zafarbíme ľubovoľné biele políčko načierno, táto podmienka prestane platiť. Nájdite minimálnu hodnotu N.

7. Postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ je definovaná predpisom

$$a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor \cdot \langle a_n \rangle \qquad \text{pre } n \geqq 1,$$

pričom a_1 je ľubovoľné reálne číslo. Výraz $\lfloor a_n \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a_n. Výraz $\langle a_n \rangle$ je určený predpisom $\langle a_n \rangle = a_n - \lfloor a_n \rfloor$. Dokážte, že počnúc od určitej hodnoty pre každé n platí $a_n = a_{n+2}$.

8. Daný je konvexný päťuholník $ABCDE$, pričom

$$|\measuredangle BAC| = |\measuredangle CAD| = |\measuredangle DAE| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle ABC| = |\measuredangle ACD| = |\measuredangle ADE|.$$

Uhlopriečky BD a CE sa pretínajú v bode P. Dokážte, že priamka AP prechádza stredom strany CD.

9. Dané je racionálne číslo x z intervalu $(0,1)$. Nech y je také číslo z intervalu $(0,1)$, ktorého n-tá cifra za desatinnou čiarkou sa rovná 2^n-tej cifre za desatinnou čiarkou čísla x. Dokážte, že aj y je racionálne.

10. Na ulici je v rade za sebou n lámp $L_1, \dots, L_n$, pričom $n \geqq 2$. Každá z nich buď svieti, alebo je zhasnutá. Každú sekundu naraz upravíme stav všetkých lámp podľa nasledujúcich pravidiel:

- ak lampa L_i a s ňou susediace lampy sú v rovnakom stave, tak L_i bude po úprave zhasnutá;
- inak bude L_i po úprave svietiť.

Na začiatku prvá lampa svieti a všetky ostatné sú zhasnuté.

a) Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n, pre ktoré budú po istom čase všetky lampy naraz zhasnuté.

b) Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n, pre ktoré nebudú nikdy všetky lampy naraz zhasnuté.

11. Nech ABC je rovnoramenný trojuholník a D je stred jeho základne BC. Označme ďalej M stred AD a N pätu výšky z bodu D na priamku BM. Dokážte, že uhol ANC je pravý.

12. Nech $d(n)$ označuje počet kladných deliteľov čísla n. Nájdite všetky prirodzené n také, že $n = d(n)^4$.

13. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$.

14. Párny počet poslancov rokuje za okrúhlym stolom. Po krátkej prestávke si znova posadajú, inak ako predtým. Ukážte, že existujú dvaja poslanci, medzi ktorými sedí rovnaký počet poslancov ako pred prestávkou.

15. Dokážte, že mnohouholník s obsahom väčším ako n sa dá vložiť do roviny tak, že zakryje aspoň $n+1$ mrežových bodov.

16. Dokážte, že súčin piatich po sebe idúcich prirodzených čísel nemôže byť štvorec.

17. Označme c najväčší reálny koreň $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Dokážte, že $\lfloor c^{1988} \rfloor$ je deliteľné 17-timi.