2005/2006
55. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 23. – 29. 4. 2006.*)

1. Ciferný súčet čísla N je 100, ciferný súčet čísla $5N$ je 50. Dokážte, že N je párne.

2. Nech AA' a BB' sú výšky ostrouhlého trojuholníka ABC. Bod D leží na oblúku ACB kružnice opísanej trojuholníku ABC. Nech P je priesečník priamok AA' a BD, nech Q je priesečník priamok BB' a AD. Dokážte, že priamka $A'B'$ prechádza stredom úsečky PQ.

3. Niekoľko jabĺk a pomarančov je rozmiestnených v 99 škatuliach. Dokážte, že vieme vybrať 50 škatúľ tak, aby obsahovali aspoň polovicu všetkých pomarančov a aspoň polovicu všetkých jabĺk.

4. Vnútri štvorca so stranou dĺžky 6 sa nachádzajú body A, B, C, D tak, že vzdialenosť ľubovoľných dvoch z týchto bodov je aspoň 5. Dokážte, že body A, B, C, D vytvárajú konvexný štvoruholník s obsahom aspoň 21.

5. V trojuholníku ABC, pre ktorý platí $|AB| + |BC| = 3|AC|$, sa jemu vpísaná kružnica so stredom v bode I dotýka strán AB a BC v bodoch D a E. Obrazy bodov D, E v stredovej súmernosti podľa bodu I označme K, L. Dokážte, že štvoruholník $ACKL$ je tetivový.

6. Ak pre prirodzené čísla a, b platí, že pre každé prirodzené číslo n je číslo $b^n + n$ deliteľné číslom $a^n + n$, tak $a = b$. Dokážte.

7. Pre ľubovoľné reálne čísla $a_i \geqq 1$ $(i = 1, 2, \dots, 2006)$ nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu
$$\frac{a_1^2 + a_2}{a_1 + a_2^2} + \frac{a_2^2 + a_3}{a_2 + a_3^2} + \dots + \frac{a_{2005}^2 + a_{2006}}{a_{2005} + a_{2006}^2} + \frac{a_{2006}^2 + a_1}{a_{2006} + a_1^2}.$$

8. Nech $\mathbb{R}^+$ je množina všetkých kladných reálnych čísel. Dokážte, že jediná funkcia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktorá spĺňa rovnosť
$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$
pre každú dvojicu kladných reálnych čísel x, y, je konštantná funkcia $f(x) \equiv 2$.

9. Daný je rovnobežník $ABCD$. Priamka ℓ prechádzajúca bodom A pretína polpriamky BC, DC postupne v bodoch X, Y. Označme K, L stredy kružníc pripísaných postupne k stranám BX, DY trojuholníkov ABX, ADY. Dokážte, veľkosť uhla KCL nezávisí na polohe priamky ℓ.

10. Na stole je n mincí $(n \geqq 2)$. Každá je z jednej strany biela a z druhej strany čierna. Mince sú na začiatku poukladané v jednom rade bielou stranou nahor. V každom kroku, pokiaľ je to možné, zvolíme jednu mincu otočenú bielou stranou nahor (nie však jednu z dvoch krajných mincí), odložíme ju zo stola preč a obrátime naopak mince, ktoré s odloženou susedili, t. j. najbližšiu mincu napravo a najbližšiu naľavo. Zistite, pre ktoré n môžu (ak robíme správne kroky) na stole ostať len dve krajné mince.

11. Dokážte, že každé prirodzené číslo $k > 1$ má kladný násobok menší ako k^5, ktorého dekadický zápis obsahuje nanajvýš štyri rôzne číslice.

12. Nech $ABCD$ je štvoruholník, pre ktorý platí $|\measuredangle CBD| = 2|\measuredangle ADB|$, $|\measuredangle ABD| = 2|\measuredangle CDB|$ a $|AB| = |CB|$. Dokážte, že $|AD| = |CD|$.

13. Zistite, či existuje množina 18 po sebe idúcich prirodzených čísel, ktorá sa dá rozdeliť na dve disjunktné množiny A, B tak, že súčin prvkov množiny A sa rovná súčinu prvkov množiny B.

14. Nájdite všetky kvadratické polynómy $p(x)$ tvaru x^2+ax+b s celočíselnými koeficientmi, pre ktoré existuje polynóm $q(x)$ s celočíselnými koeficientmi taký, že $p(x)q(x)$ je polynóm, ktorého všetky koeficienty sú ± 1.

15. Najnovší výskum v oblasti červích dier konečne umožnil medzigalaktické cestovanie. Do vybudovania GIGANT (Global Intergalactic Network for Travel) sa zapojilo n galaxií $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Každá dvojica z nich má byť prepojená práve jednou priamou diaľnicou, ktorej dĺžka vyjadrená v jednotkách yt (years of travel) bude prirodzené číslo a nebude presahovať r tak, že
(1) pre každé prirodzené číslo od 1 po r (vrátane) bude aspoň jedna diaľnica s danou dĺžkou;
(2) pre každú okružnú cestu $G_iG_jG_k$ budú dve z týchto troch diaľnic rovnako dlhé a každá z nich bude dlhšia ako tretia.
Úlohy:
(a) Určte najväčšiu hodnotu prirodzeného čísla r, pre ktorú sa dá vybudovať GIGANT.
(b) Koľko rôznych diaľničných sietí sa dá vybudovať pre túto hodnotu?

16. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník $|AB| \neq |AC|$, nech H je jeho ortocentrum a M je stred strany BC. Body D na AB a E na AC sú také, že $|AE| = |AD|$ a D, H, E sú kolineárne. Dokážte, že priamka HM je kolmá na chordálu kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ADE.

17. Nájdite všetky prirodzené čísla $n > 1$ také, pre ktoré existuje jediné prirodzené číslo $a \leqq n!$ také, že $a^n + 1$ je deliteľné číslom $n!$.