61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8*

---

1. *Korešpondenčná matematická súťaž prebieha v troch kolách, ktorých náročnosť sa stupňuje. Do druhého kola postupujú len tí riešitelia, ktorí boli úspešní v prvom kole, do tretieho kola postupujú len úspešní riešitelia druhého kola. Víťazom je každý, kto je úspešným riešiteľom posledného, teda tretieho kola. V poslednom ročníku tejto súťaže bolo presne 14 % riešiteľov úspešných v prvom kole, presne 25 % riešiteľov druhého kola postúpilo do tretieho kola a presne 8 % riešiteľov tretieho kola zvíťazilo. Aký je najmenší počet súťažiacich, ktorí sa mohli zúčastniť prvého kola? Koľko by bolo v takomto prípade víťazov?* (M. Petrová)

Nápad. Všetky medzivýsledky musia byť prirodzené čísla.

Riešenie. Počet všetkých riešiteľov prvého kola označme x. Počet úspešných riešiteľov prvého kola (a teda počet všetkých riešiteľov druhého kola) je 14 % z x, teda $0{,}14x$. Počet úspešných riešiteľov druhého kola (a teda počet všetkých riešiteľov tretieho kola) je 25 % z $0{,}14x$, t. j. $0{,}25 \cdot 0{,}14x = 0{,}035x$. Počet úspešných riešiteľov tretieho kola (a teda aj počet víťazov) je 8 % z $0{,}035x$, t. j. $0{,}08 \cdot 0{,}035x = 0{,}0028x$.

Keďže všetky výpočty sú presné (bez zaokrúhľovania), musia byť čísla x, $0{,}14x$, $0{,}035x$ a $0{,}0028x$ prirodzené. Začneme posledným z nich:

$$0{,}0028x = \frac{28}{10\,000}x = \frac{7}{2\,500}x,$$

číslo x teda musí byť násobkom čísla 2 500. Keďže hľadáme najmenšie riešenie, budeme postupne skúšať násobky 2 500, kým nebudú všetky spomínané čísla prirodzené:

x	$0{,}14x$	$0{,}035x$	$0{,}0028x$	záver
2 500	350	87,5	7	nevyhovuje
5 000	700	175	14	vyhovuje

Najmenší počet súťažiacich, ktorí sa mohli zúčastniť prvého kola, je 5 000. Víťazov by v takom prípade bolo 14.

Iné riešenie. Počet všetkých riešiteľov prvého kola označme x. Počet úspešných riešiteľov prvého kola (a teda počet všetkých riešiteľov druhého kola) je 14 % z x, teda

$$\frac{14}{100}x = \frac{7}{50}x.$$

Počet úspešných riešiteľov druhého kola (a teda počet všetkých riešiteľov tretieho kola) je 25 % z predchádzajúceho počtu, t. j.

$$\frac{25}{100} \cdot \frac{7}{50}x = \frac{7}{200}x.$$

Počet úspešných riešiteľov tretieho kola (a teda aj počet víťazov) je 8 % z predchádzajúceho počtu, t. j.

$$\frac{8}{100} \cdot \frac{7}{200}x = \frac{7}{2500}x.$$

Všetky vyššie uvedené výrazy musia byť prirodzené čísla, číslo x teda musí byť spoločným násobkom čísel 50, 200 a 2 500. Keďže nás zaujíma najmenší možný počet súťažiacich v prvom kole súťaže, hľadáme najmenší spoločný násobok uvedených čísel, čo je 5 000.

Najmenší počet súťažiacich v prvom kole je teda 5 000 a počet víťazov by v tomto prípade bol

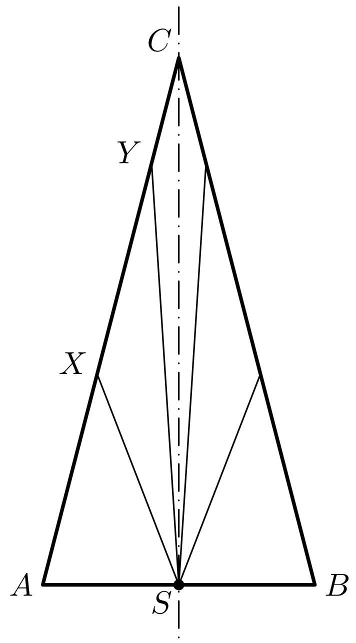
$$\frac{7}{2500} \cdot 5000 = 14.$$

---

2. *Je daný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB dlhou* 10 cm *a ramenami dlhými* 20 cm. *Bod S je stred základne AB. Rozdeľte trojuholník ABC štyrmi priamkami prechádzajúcimi bodom S na päť častí s rovnakým obsahom. Zistite, aké dlhé úseky vytnú tieto priamky na ramenách trojuholníka ABC.* (*E. Trojáková*)

Nápad. Uvedená konštrukcia je osovo súmerná.

Riešenie. Trojuholník ABC je súmerný podľa osi CS, preto aj deliace priamky musia byť osovo súmerné podľa tejto osi. Výsledné časti potom budú tvoriť dve dvojice osovo súmerných trojuholníkov a jeden (osovo súmerný) štvoruholník s vrcholom C. Označme priesečníky dvoch deliacich priamok s jedným ramenom X a Y ako na obr. 1.



Obr. 1

Podľa zadania majú byť obsahy trojuholníkov ASX a XSY a dvojnásobok obsahu trojuholníka YSC rovnaké. Tieto tri trojuholníky však majú rovnakú výšku zo spoločného vrcholu S, takže ich obsahy sú v uvedenom pomere práve vtedy, keď pre protiľahlé strany platí

$$|AX| = |XY| = 2|YC|.$$

Súčasne vieme, že

$$|AC| = |AX| + |XY| + |YC| = 20\,\text{cm}.$$

Z uvedeného vyplýva, že $5|YC| = 20\,\text{cm}$, t. j. $|YC| = 4\,\text{cm}$ a $|AX| = |XY| = 8\,\text{cm}$. Deliace priamky vytínajú na ramenách trojuholníka úsečky dlhé 4 a 8 cm.

---

3. *Hľadáme päťciferné číslo s nasledujúcimi vlastnosťami: je to palindróm (t. j. číta sa odzadu rovnako ako odpredu), je deliteľné dvanástimi a vo svojom zápise obsahuje cifru 2 bezprostredne za cifrou 4. Určte všetky možné čísla, ktoré vyhovujú zadaným podmienkam.* (*M. Mach*)

Nápad. Určte, ako môžu byť umiestnené cifry 2 a 4; pre každý prípad zvlášť potom diskutujte zvyšné podmienky.

Riešenie. Päťciferné palindrómy, v ktorých sa cifra 2 nachádza bezprostredne za cifrou 4, sú práve nasledujúce:

$$42{*}24, \quad {*}424{*}, \quad {*}242{*}, \quad 24{*}42.$$

Pre tieto prípady stačí teraz diskutovať deliteľnosť dvanástimi. Číslo je deliteľné dvanástimi práve vtedy, keď je deliteľné tromi a zároveň štyrmi, t. j. práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný tromi a zároveň posledné dvojčíslie je deliteľné štyrmi.

Číslo 24 je deliteľné štyrmi, preto sú palindrómy typu $42{*}24$ vždy deliteľné štyrmi, a preto sme zaujímame len o deliteľnosť tromi. Známe cifry majú ciferný súčet 12, ktorý deliteľný tromi je, preto hviezdička uprostred musí zastupovať násobok troch – 0, 3, 6 alebo 9.

Palindrómy typu ${*}424{*}$ sú deliteľné štyrmi práve vtedy, keď posledná cifra je 0, 4 alebo 8. Keďže sa jedná o palindróm, rovnaká cifra bude aj na začiatku, preto variant s nulou nevyhovuje. Po doplnení štvoriek je ciferný súčet 18, po doplnení osmičiek 26. Takže deliteľný tromi je len palindróm 44244.

Palindrómy typu ${*}242{*}$ sú deliteľné štyrmi práve vtedy, keď posledná cifra je 0, 4 alebo 8. Rovnako ako v predošlom prípade vylúčime cifru 0 a určíme ciferné súčty: pre štvorky je to 16, pre osmičky 24. Deliteľný tromi je len palindróm 82428.

Keďže číslo 42 nie je deliteľné štyrmi, palindrómy typu $24{*}42$ nemôžu byť deliteľné štyrmi, teda ani dvanástimi. Zadaným podmienkam teda vyhovujú práve čísla

$$42024,\ 42324,\ 42624,\ 42924,\ 44244,\ 82428.$$

---

4. *Na stred hrnčiarskeho kruhu sme položili kocku, ktorá mala na každej svojej stene napísané jedno prirodzené číslo. Tesne predtým, ako sme kruh roztočili, sme z miesta, kde stojíme, videli tri steny kocky a teda len tri čísla. Ich súčet bol 42. Po otočení hrnčiarskeho kruhu o 90° sme z rovnakého miesta videli tri steny s číslami, ktoré mali súčet 34 a po otočení o ďalších 90° sme videli tri čísla so súčtom 53.*

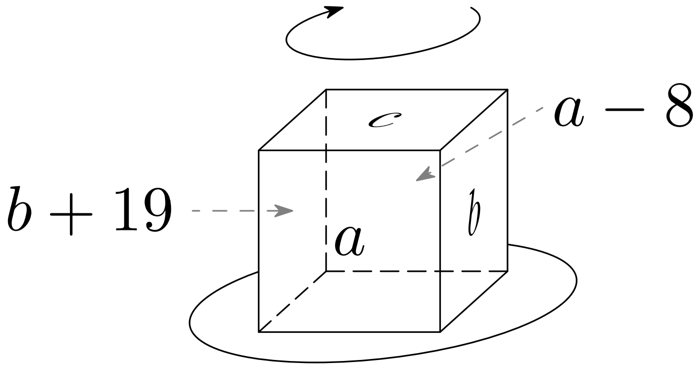
1. *Určte súčet troch čísel, ktoré z nášho miesta uvidíme, keď sa kruh otočí ešte o ďalších 90°.*
2. *Kocka celý čas ležala na stene s číslom 6. Určte maximálny možný súčet všetkých šiestich čísel na kocke.*

(*L. Šimůnek*)

Nápad. Zamerajte sa na vzťah medzi číslami na navzájom rovnobežných bočných stenách.

Riešenie. Čísla, ktorá vidíme pred roztočením kruhu, označme a, b, c, pričom c je číslo na hornej stene. Po otočení o 90° stratíme z nášho pohľadu stenu s číslom a a objaví sa stena s ňou rovnobežná. Podľa zadania sa súčet viditeľných čísel zmení z 42 na 34, teda zmenší sa o 8. Číslo, ktoré sa ukázalo po otočení je preto o 8 menšie ako a, t. j. $a-8$.

Podobne uvažujeme o ďalšej otočke o 90°. Pri nej stratíme z pohľadu stenu s číslom b a súčet viditeľných čísel sa zmení z 34 na 53, teda zväčší sa o 19. Na poslednej bočnej stene sa preto objaví číslo $b+19$.



Obr. 2

Ešte po ďalšom otočení o 90° tak vidíme steny s číslami $b+19$, a, c. Zo zadania vieme, že $a+b+c=42$, teda $a+b+19+c=42+19=61$. Súčet 61 je riešením prvej časti úlohy.

Teraz budeme riešiť druhú časť úlohy. Pred roztočením kruhu vidíme tri steny so súčtom 42, po otočení o 180° vidíme iné dve bočné steny a stále rovnakú hornú stenu s číslom c, tentoraz ide o súčet 53. Teda súčet čísel na týchto piatich stenách je rovný $42+53-c$. Na kocke je podľa zadania zospodu napísané číslo 6, súčet všetkých jej čísel je teda rovný $6+42+53-c$, t. j. $101-c$. Ak máme určiť najväčšiu možnú hodnotu tohto výrazu, dosadíme za c najmenšiu prípustnú hodnotu 1. Potom vidíme, že súčet čísel na kocke mohol byť najviac 100.

Iné riešenie druhej časti. Z vyššie uvedeného riešenia použijeme obr. 2 s jeho popisom. Súčet všetkých čísel na kocke je

$$a+b+(a-8)+(b+19)+c+6=2a+2b+c+17.$$

Pritom platí, že všetky neznáme sú prirodzené čísla a $a \geqq 9$, aby aj hodnota $a-8$ bola prirodzené číslo. Poslednou podmienkou je $a+b+c=42$. Aby sme pri danom súčte $a+b+c$ získali čo najväčšiu hodnotu výrazu $2a+2b+c+17$, musíme za c zvoliť čo najmenšiu prípustnú hodnotu, t. j. 1, pretože ostatné neznáme sú vo výraze zastúpené vo svojich násobkoch. Súčet $a+b$ potom nadobúda hodnotu 41 a súčet všetkých šiestich čísel na kocke tak môže byť najviac

$$2a+2b+c+17=2\cdot 41+1+17=100.$$

5. *Pankrác, Servác a Bonifác sú traja bratia, ktorí majú P, S a B rokov. Vieme, že P, S a B sú prirodzené čísla menšie ako 16, pre ktoré platí:*

$$\begin{aligned} P &= \frac{5}{2}(B - S), \\ S &= 2(B - P), \\ B &= 8(S - P). \end{aligned}$$

Určte vek všetkých troch bratov. (*L. Hozová*)

Nápad. Bonifácov vek možno určiť veľmi ľahko.

Riešenie. Z tretej rovnice vyplýva, že B je prirodzené číslo menšie ako 16 práve vtedy, keď $S - P = 1$, čiže $S = P + 1$; potom nutne $B = 8$. Dosadíme tieto poznatky do druhej rovnice a určíme P:

$$\begin{aligned} P + 1 &= 2(8 - P), \\ P + 1 &= 16 - 2P, \\ 3P &= 15, \\ P &= 5. \end{aligned}$$

Odtiaľ $S = 5 + 1 = 6$ a ľahko overíme, že trojica $B = 8$, $P = 5$ a $S = 6$ vyhovuje aj rovnici prvej: $5 = \frac{5}{2}(8 - 6)$. Pankrác má teda 5, Servác 6 a Bonifác 8 rokov.

Poznámka. S rovnicami zo zadania možno manipulovať rôznymi spôsobmi, no bez obmedzenia $P, S, B < 16$ by úloha nemala riešenie určené jednoznačne – nájdete nejaké ďalšie?

Iné riešenie. Zo zadania vyplýva, že P, S a B sú kladné čísla práve vtedy, keď $B > S > P > 0$. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení určíme, že z tretej rovnice vyplýva $B = 8$ a $P = S - 1$. Navyše z druhej rovnice je zrejmé, že S je párne číslo. Spolu teda vidíme, že riešením úlohy môže byť jedine niektorá z nasledujúcich trojíc čísel:

B	S	P
8	6	5
8	4	3
8	2	1

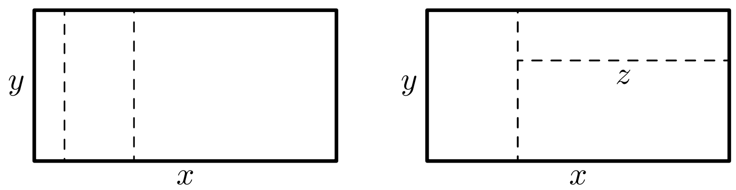
Dosadením do prvej a druhej rovnice zistíme, že jediným riešením je trojica $B = 8$, $S = 6$ a $P = 5$.

6. *Janka narysovala obdĺžnik s obvodom* 22 cm *a dĺžkami strán vyjadrenými v centimetroch celými číslami. Potom obdĺžnik rozdelila bezo zvyšku na tri obdĺžniky, z ktorých jeden mal rozmery* 2 cm×6 cm. *Súčet obvodov všetkých troch obdĺžnikov bol o* 18 cm *väčší ako obvod pôvodného obdĺžnika. Aké rozmery mohol mať pôvodný obdĺžnik? Nájdite všetky riešenia.* (*M. Dillingerová*)

Nápad. Určte, ako mohla Janka obdĺžnik rozdeliť; pre jednotlivé možnosti potom vyjadrite zadaný rozdiel obvodov pomocou dĺžok deliacich čiar.

Riešenie. Všetky veličiny v texte sú vyjadrené v centimetroch, jednotky ďalej uvádzať nebudeme. Dĺžky strán Jankinho obdĺžnika označíme x a y, podľa zadania sú to prirodzené čísla.

Najskôr zistíme, ako mohla Janka svoj obdĺžnik rozdeliť. Typovo máme len dve možnosti uvedené na obr. 3 (ktorý je len schematický, t. j. rozhodne nepredpokladáme, že $x > y$).

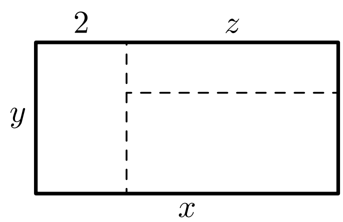


Obr. 3

Obvod pôvodného obdĺžnika je $2(x + y) = 22$, teda $x + y = 11$. Súčet obvodov troch nových obdĺžnikov je vždy väčší ako pôvodný obvod, a to práve o dvojnásobok súčtu dĺžok deliacich úsečiek, ktoré sú na obr. 3 vyznačené prerušovane. Tento rozdiel má byť rovný 18.

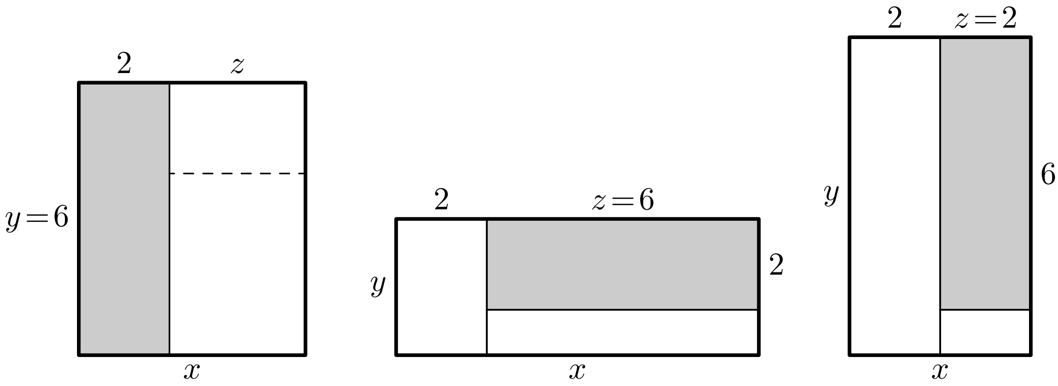
I. Obe deliace úsečky majú rovnakú dĺžku y. Potom musí platiť $4y = 18$, odtiaľ $y = 4{,}5$. To však nie je možné, pretože 4,5 nie je celé číslo. Týmto spôsobom teda Janka obdĺžnik nerozdelila.

II. Dve deliace úsečky, ktoré ležia na jednej priamke, majú súčet dĺžok y. Dĺžku tretej deliacej úsečky označíme z. Potom musí platiť $2y + 2z = 18$, teda $y + z = 9$. To spolu s podmienkou $x + y = 11$ znamená, že rozmer x je o 2 väčší ako rozmer z. Tento poznatok naznačíme do obr. 4.



Obr. 4

Teraz preveríme, ktorý z nových obdĺžnikov môže mať rozmery 2×6 a ako môže byť umiestnený – celkom máme tri možnosti ako na obr. 5.



Obr. 5

Pomocou skôr odvodených vzťahov medzi x, y a z vyjadríme rozmery obdĺžnika v jednotlivých prípadoch:

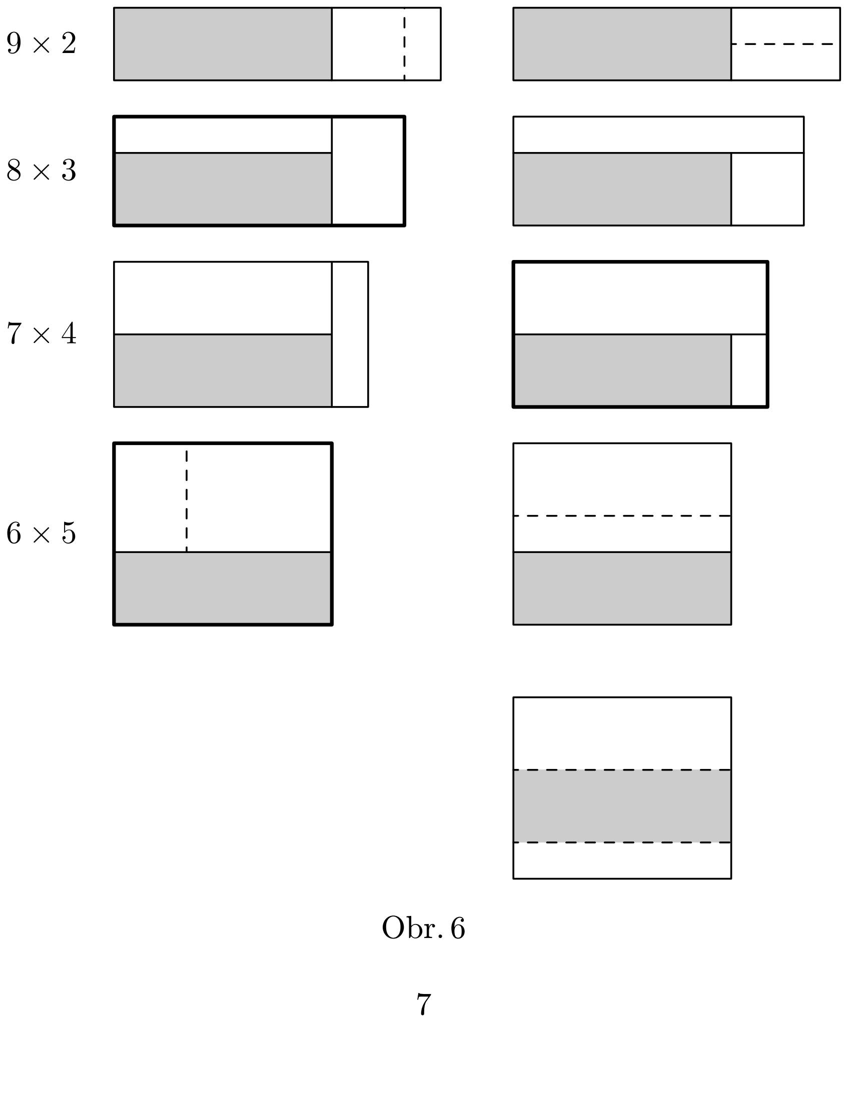
a) Ak $y = 6$, tak $x = 5$ a $z = 3$.

b) Ak $z = 6$, tak $x = 8$ a $y = 3$.

c) Ak $z = 2$, tak $x = 4$ a $y = 7$.

Jankin obdĺžnik mohol mať rozmery 5×6, 8×3 alebo 4×7.

Poznámka. Pri rovnakom označení ako vyššie z požiadavky, aby Jankin obdĺžnik obsahoval obdĺžnik 2×6, vyplýva, že $x, y \geqq 2$. Keďže x a y sú prirodzené čísla a $x + y = 11$, rozmery Jankinho obdĺžnika by mohli byť 2×9, 3×8, 4×7 alebo 5×6.



Obr. 6

Teraz možno postupne preberať tieto štyri prípady, teda umiestniť obdĺžnik $2 \times \times 6$, diskutovať možné dodatočné delenia (obr. 6) a kontrolovať požiadavku o obvodoch. Takto rýchlo zistíme, že jediné možnosti, ako mohla Janka svoj obdĺžnik rozdeliť, sú práve vyššie uvedené možnosti a), b), c).

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: 1. M. Petrová, 2. E. Trojáková, 3. M. Mach, 4. L. Šimůnek, 5. L. Hozová, 6. M. Dillingerová

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Trojáková

Redakčná úprava: Erika Trojáková, Vojtěch Žádník

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011