61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7

---

1. *Trpaslíci chodia na vodu k potoku. Džbánik každého z trpaslíkov je inak veľký: majú objemy 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 litrov. Trpaslíci si džbániky medzi sebou nepožičiavajú a vždy ich prinesú úplne plné vody.*

- *Kýchal prinesie vo svojom džbániku viac vody ako Smejko.*
- *Spachtoš by musel ísť po vodu trikrát, aby priniesol práve toľko vody, koľko Plaško v jednom svojom džbániku.*
- *Vedkov džbánik je len o dva litre väčší ako Smejkov.*
- *Sám Kýblik prinesie toľko vody, koľko Spachtoš a Smejko dokopy.*
- *Keď idú po vodu Vedko a Kýblik, prinesú rovnako vody ako Dudroš, Kýchal a Smejko dokopy.*

Koľko vody prinesú Kýchal a Kýblik dohromady? (M. Petrová)

Nápad. Začnite druhou podmienkou.

Riešenie. Z druhej podmienky vyplýva, že Spachtošov džbánik má objem 3 litre a Plaškov 9 litrov (platí $3 \cdot 3 = 9$, a keby mal Spachtoš džbánik iný, musel by byť Plaškov džbánik aspoň 12-litrový).

Teraz zo štvrtej podmienky vyplýva, že Kýblikov džbánik je o 3 litre väčší ako Smejkov. Spoločne s treťou podmienku tak vieme, že Smejko, Vedko a Kýblik majú postupne džbániky s objemami buď 4, 6 a 7, alebo 5, 7 a 8 litrov.

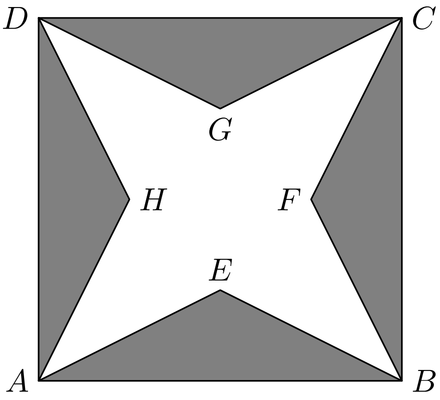
Z prvej podmienky potom vyplýva, že jediné možnosti, ako mali trpaslíci džbániky rozdelené, sú:

3	4	5	6	7	8	9
Spachtoš	Smejko	Kýchal	Vedko	Kýblik	Dudroš	Plaško
Spachtoš	Smejko	Dudroš	Vedko	Kýblik	Kýchal	Plaško
Spachtoš	Dudroš	Smejko	Kýchal	Vedko	Kýblik	Plaško

Keď overíme poslednú (piatu) podmienku, zistíme, že prvé dve vyznačené možnosti nevyhovujú ($6 + 7 \neq 8 + 5 + 4$), zatiaľ čo tretia áno ($7 + 8 = 4 + 5 + 6$). Kýchal s Kýblikom teda dohromady prinesú $6 + 8 = 14$ litrov vody.

---

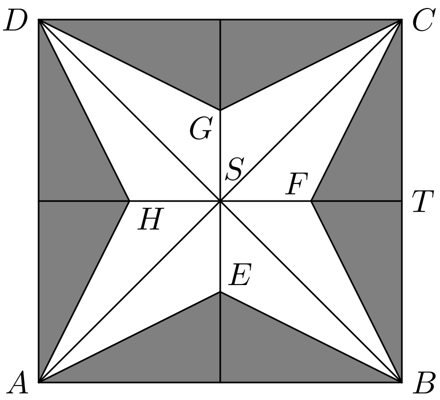
2. *Na obr. 1 je štvorec $ABCD$, v ktorom sú umiestnené štyri zhodné rovnoramenné trojuholníky ABE, BCF, CDG a DAH, všetky vyfarbené sivou. Strany štvorca $ABCD$ sú základňami týchto rovnoramenných trojuholníkov. Vieme, že sivé plochy štvorca $ABCD$ majú dokopy rovnaký obsah ako biela plocha štvorca. Ďalej vieme, že $|HF| =$ $= 12\,\text{cm}$. Určte dĺžku strany štvorca $ABCD$.* (L. Šimůnek)



Obr. 1

Nápad. Vhodne obrázok rozdeľte.

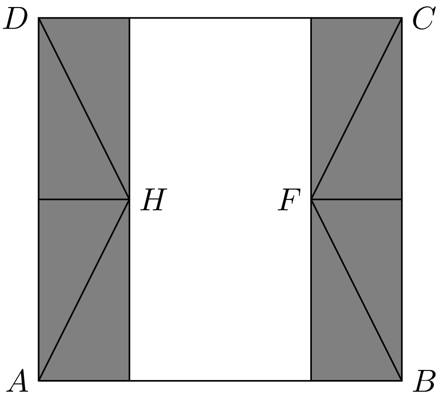
Riešenie. V štvorci $ABCD$ vyznačíme obe uhlopriečky a spojnice stredov protiľahlých strán. Štyri takto doplnené úsečky sa pretínajú v jedinom bode S a rozdeľujú štvorec bezo zvyšku na osem zhodných trojuholníkov. Jeden z nich sme v obr. 2 označili STC.



Obr. 2

Týchto osem trojuholníkov sa zhoduje aj vo svojich sivo vyfarbených častiach, a preto zadanú podmienku o obsahoch môžeme využiť pre každý tento trojuholník zvlášť. V prípade trojuholníka STC tak platí, že jeho sivá a biela plocha, teda trojuholníky FTC a SFC, majú rovnaký obsah. Oba trojuholníky majú výšku TC. Aby mali rovnaký obsah, musia byť rovnaké aj veľkosti strán kolmých na túto výšku, teda $|FT| = |SF|$. Dĺžka úsečky SF je polovičná vzhľadom na dĺžku uvedenú v zadaní, teda je 6 cm. Veľkosť úsečky ST je potom $6 + 6 = 12$ (cm) a veľkosť strany štvorca $ABCD$ je $2 \cdot 12 = 24$ (cm).

Iné riešenie. Vo všetkých sivo zafarbených rovnoramenných trojuholníkoch vyznačíme výšku kolmú na základňu. Tým rozdelíme pôvodné trojuholníky na osem zhodných pravouhlých trojuholníkov, ktoré vnútri štvorca $ABCD$ premiestnime tak, ako na obr. 3.



Obr. 3

V štvorci $ABCD$ sme dostali dva zhodné sivé obdĺžniky a jeden biely obdĺžnik. Strany týchto troch obdĺžnikov, na obr. 3 zvislé, majú rovnakú dĺžku. Veľkosť strany bieleho obdĺžnika, ktorá je na obrázku vodorovne, je zadaných 12 cm. Aby sivé plochy a biela plocha mali rovnaký obsah, musia mať vodorovné strany oboch sivých obdĺžnikov dokopy dĺžku takisto 12 cm. Veľkosť strany štvorca $ABCD$ je teda 24 cm.

---

3. *Sedem bezprostredne po sebe idúcich celých čísel stálo v rade, zoradené od najmenšieho po najväčšie. Po chvíli sa čísla začali nudiť, a tak sa najskôr vymenilo prvé s posledným. Potom sa druhé najväčšie posunulo úplne na začiatok radu a nakoniec sa najväčšie z čísel postavilo do stredu. Na svoju veľkú spokojnosť sa tak ocitlo vedľa čísla, ktoré bolo presne jeho polovicou. Ktorých sedem čísel mohlo stáť pôvodne v rade?* (*S. Bednářová*)

Nápad. Zistite v akých všetkých vzťahoch je na konci číslo v strede a číslo s ním susedné.

Riešenie. Čísla označíme vzostupne podľa veľkosti ako 1. až 7. Ich rozmiestnenie sa postupne menilo takto:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
7.	2.	3.	4.	5.	6.	1.
6.	7.	2.	3.	4.	5.	1.
6.	2.	3.	7.	4.	5.	1.

Takže číslo v strede by mohlo byť dvojnásobkom tretieho čísla v rade alebo štvrtého čísla v rade.

Rozoberme najskôr možnosť, že 7. číslo je dvojnásobkom 3. čísla v rade. Keďže čísla v pôvodnom rade boli po sebe idúce, tak rozdiel medzi 3. a 7. číslom je štyri. Tento rozdiel musí byť zároveň aj tretie číslo, keďže 7. číslo je dvakrát 3. číslo. Keďže tretie číslo je 4, tak na začiatku mohli stáť v rade čísla 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Pri druhej možnosti je rozdiel medzi 4. číslom a 7. číslom rovný 3 a toto číslo je súčasne štvrté číslo z radu. Keďže štvrté číslo je 3, tak v rade mohli stáť na začiatku aj čísla 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Úloha má teda dve riešenia: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 alebo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

4. *Učiteľka Smoliarska pripravovala previerku pre svoju triedu v troch verziách, aby žiaci nemohli odpisovať. V každej verzii zadala tri hrany kvádra v centimetroch a úlohou bolo vypočítať jeho objem. Úlohy si ale dopredu neprerięšila, a tak netušila, že výsledok je vo všetkých troch verziách rovnaký. Do zadaní žiakom napísala tieto dĺžky hrán:* 12, 18, 20, 24, 30, 33 *a* 70. *Z deviatich celočíselných dĺžok hrán, ktoré učiteľka Smoliarska zadala, sme vám teda prezradili iba sedem a ani sme vám neprezradili, ktoré dĺžky patria do toho istého zadania. Podarí sa vám napriek tomu určiť zostávajúce dve dĺžky hrán?*

(*L. Šimůnek*)

Nápad. Rozložte zadané dĺžky na súčin prvočísel.

Riešenie. Rozložíme dĺžky všetkých hrán na súčiny prvočísel:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3,\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3,\ 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5,$$
$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3,\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 33 = 3 \cdot 11,\ 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

V týchto súčinoch sa nachádzajú činitele 7 a 11, teda výsledný objem musí byť násobkom čísla 77. Činitele 7 a 11 sú v zadaných dĺžkach zahrnuté každý iba raz, a to v hranách 33 a 70. Rozhodnime, či tieto dĺžky môžu patriť dvom rôznym kvádrom.

Keby hrany 33 a 70 patrili rôznym kvádrom, musel by kváder s hranou 33 mať ďalšiu hranu rovnú násobku sedem, kváder s hranou 70 by musel mať ďalšiu hranu rovnú násobku jedenástich a posledný kváder by musel mať medzi svojimi hranami násobok siedmich a násobok jedenástich. Práve sme predpokladali existenciu aspoň troch hrán, ktoré nie sú uvedené v zadaní, ale v ňom pritom chýbajú iba dve. Tým sme ukázali, že hrany 33 a 70 patria rovnakému kvádru.

Obe dĺžky hrán, ktoré nie sú v zadaní uvedené, musia byť násobkami čísla 77 a patriť k zostávajúcim kvádrom. Zvyšnú hranu nášho kvádra preto musíme hľadať medzi zadanými hranami. Všimnime si hrany 18 a 24. Podľa prvej odvodíme, že výsledný objem je násobkom deviatich (t. j. $3 \cdot 3$), podľa druhej je zároveň násobok ôsmich (t. j. $2 \cdot 2 \cdot 2$). V súčinoch zodpovedajúcich hranám 33 a 70 sa nachádzajú činitele 2 a 3 každý práve raz. Tretia hrana uvažovaného kvádra preto musí mať vo svojom rozklade súčin $2 \cdot 2 \cdot 3$. V zadaní tak môžeme vybrať buď hranu 12, alebo 24.

Uvažujme najskôr o možnosti, že jeden z kvádrov má hrany 33, 70 a 12, teda že kvádre majú objem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Pre druhý kváder vyberieme hranu 24 a vidíme, že ten už nesmie mať v dĺžke žiadnej ďalšej hrany činiteľ 2. V zadaní však ostávajú iba také dĺžky, preto možnosť s kvádrom s hranami 33, 70 a 12 musíme zavrhnúť.

Teraz uvažujme o možnosti, že jeden z kvádrov má hrany 33, 70 a 24, teda že kvádre majú objem

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Hrany zostávajúcich dvoch kvádrov ľahko určíme, pokiaľ sa držíme poznatku, že kváder musí mať v dĺžkach svojich hrán raz činiteľ 5 a práve dvakrát činiteľ 3: druhý kváder má hrany

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3,\ 154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$$

a hrany tretieho kvádra sú

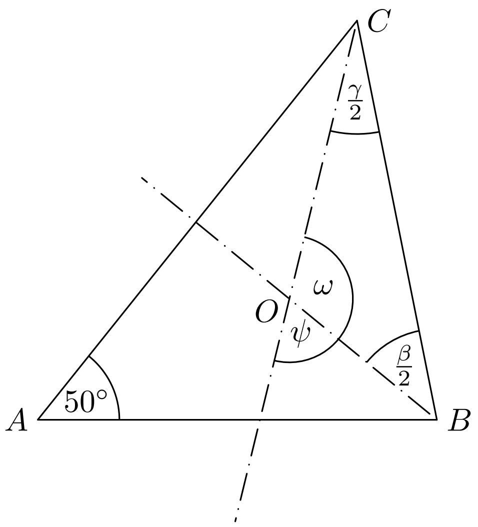
$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5,\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3,\ 154 = 2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Dĺžky zostávajúcich dvoch hrán, ktoré nie sú uvedené v zadaní, sú zhodne 154 cm.

5. *Jeden vnútorný uhol trojuholníka má 50°. Aký veľký uhol zvierajú osi dvoch zostávajúcich vnútorných uhlov trojuholníka?* (L. Hozová)

Nápad. Nemusíme poznať veľkosti zvyšných dvoch vnútorných uhlov, aby sme úlohu doriešili.

Riešenie. Uvažujme trojuholník ABC s uhlom $50°$ pri vrchole A; neznáme uhly pri vrcholoch B a C označíme β a γ. Priesečník osí vnútorných uhlov označíme O, uhol BOC označíme ω a uhol k nemu susedný ψ (obr. 4).



Obr. 4

Súčet vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku je $180°$. Preto v trojuholníkoch ABC a OBC platí

$$50° + \beta + \gamma = 180°,$$
$$\omega + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180°.$$

Z druhej rovnosti a z toho, že ω a ψ sú susedné uhly, vyplýva

$$\psi = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Z prvej rovnosti vyjadríme

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{130°}{2} = 65°,$$

teda odchýlka osí zostávajúcich dvoch vnútorných uhlov je $65°$.

Poznámka. Odpoveď, že osi zvierajú uhol $\omega = 180° - 65° = 115°$, považujeme tiež za správnu.

6. *Hľadáme šesťciferný číselný kód, o ktorom vieme, že:*

- *žiadna cifra v ňom nie je viackrát,*
- *obsahuje aj* 0*, tá však nie je na predposlednom mieste,*
- *vo svojom zápise nemá nikdy vedľa seba dve párne ani dve nepárne cifry,*
- *susedné cifry sa od seba líšia aspoň o* 3*,*
- *keď číslo rozdelíme na tri dvojčíslia, tak prvé aj druhé dvojčíslie sú obe násobkom tretieho, teda posledného dvojčíslia.*

Určte hľadaný kód. (*M. Volfová*)

Nápad. Zamerajme sa na to, ako vyzerajú jednotlivé dvojčíslia, obzvlášť to posledné.

Riešenie. Posledná cifra nemôže byť 0 ani 5: keby to tak bolo, tak by podľa piatej podmienky prvé a druhé dvojčíslie končilo buď 0 alebo 5, takže cifra 0 alebo 5 by bola v kóde obsiahnutá viackrát, čo odporuje prvej podmienke.

S týmto poznatkom spolu s ostatnými podmienkami zo zadania začneme vypisovať všetky možné dvojčíslia, ktoré sa môžu vyskytovať na konci kódu. Navyše, aby bola splnená piata a prvá podmienka, má zmysel uvažovať len také dvojčíslia, ktoré majú aspoň dva rôzne násobky menšie ako 100. Všetky vyhovujúce možnosti sú uvedené v ľavom stĺpci nasledujúcej tabuľky. Pravý stĺpce obsahuje všetky ich dvojciferné násobky, ktoré prípadne môžu tvoriť prvé a druhé dvojčíslie hľadaného kódu.

14	28, 42, 56, 70, 84, 98
16	32, 48, 64, 80, 96
18	36, 54, 72, 90
27	54, 81
29	58, 87

Pokiaľ vyradíme všetky dvojčíslia, ktoré nevyhovujú tretej alebo štvrtej podmienke zo zadania, zostávajú len:

14	70
16	96
18	36, 72, 90
27	81
29	58

Odtiaľ je zrejmé, že posledné dvojčíslie musí byť 18. Aby bola splnená druhá podmienka, musí byť jedno zo zostávajúcich dvojčíslí 90, a aby bola splnená štvrtá podmienka, musí byť 90 ako prvé dvojčíslie. Z rovnakého dôvodu nemôže byť druhé dvojčíslie 72. Zostáva už len 36. Výsledný kód teda môže byť jedine číslo 903618 a kontrolou všetkých podmienok zo zadania zistíme, že to tak skutočne je.

Poznámka. Popri úvodnom poznatku, že 0 nemôže byť posledná cifra, sa dá využiť aj to, že 0 nemôže byť na prvom ani na treťom mieste. (Inak by prvé alebo druhé dvojčíslie predstavovalo jednociferné číslo, teda podľa piatej podmienky by i posledné dvojčíslie muselo byť jednociferné číslo a na piatom mieste by musela byť zase 0.) Preto je 0 buď na druhom alebo štvrtom mieste. Z tretej podmienky potom vyplýva, že párne cifry môžu byť len na párnych a nepárne na nepárnych miestach. Ďalšia diskusia sa potom trošku zjednoduší.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	1. M. Petrová, 2. L. Šimůnek, 3. S. Bednářová, 4. L. Šimůnek, 5. L. Hozová, 6. M. Volfová
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Trojáková
Redakčná úprava:	Erika Trojáková, Vojtěch Žádník
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011