2022/2023

72. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 7. – 12. 7. 2023.*)

1. Nájdite všetky zložené kladné celé čísla n také, že ak sú d_1, d_2, …, d_k všetky jeho kladné delitele a $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, tak pre každé i také, že $1 \leqq i \leqq k-2$, platí, že číslo d_i je deliteľom čísla $d_{i+1} + d_{i+2}$.

2. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník taký, že $|AB| < |AC|$. Označme Ω jemu opísanú kružnicu a S stred jej oblúka s krajnými bodmi C a B obsahujúceho bod A. Nech kolmica z bodu A na priamku BC pretína úsečku BS v bode D a kružnicu Ω v bode E rôznom od A. Nech rovnobežka s priamkou BC cez bod D pretína priamku BE v bode L. Označme ω kružnicu opísanú trojuholníku BDL. Nech P je priesečník kružníc ω a Ω rôzny od B. Dokážte, že dotyčnica ku kružnici ω v bode P pretína priamku BS na osi uhla BAC.

3. Nech k je celé číslo také, že $k \geqq 2$. Určte všetky nekonečné postupnosti kladných celých čísel $(a_1, a_2, \ldots)$ také, že existuje polynóm P taký, že

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots + c_1 x + c_0,$$

kde c_0, c_1, …, c_{k-1} sú nezáporné celé čísla, a pre každé kladné celé číslo n platí

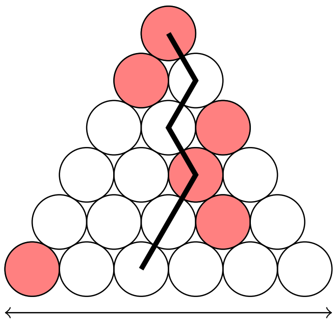
$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}.$$

4. Nech x_1, x_2, …, x_{2023} sú navzájom rôzne kladné reálne čísla také, že pre každé n z množiny $\{1, 2, \ldots, 2023\}$ platí

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

a číslo a_n je celé. Dokážte, že $a_{2023} \geqq 3034$.

5. Nech n je kladné celé číslo. Pod *japonským trojuholníkom* rádu n budeme rozumieť rozmiestnenie $1 + 2 + \ldots + n$ dotykmi prepojených zhodných krúžkov do tvaru rovnostranného trojuholníka s n riadkami tak, že pre každé i z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ obsahuje i. riadok práve i krúžkov, z ktorých práve jeden je červený. V japonskom trojuholníku budeme pod *nindža cestou* rozumieť postupnosť n krúžkov, ktorá sa začína v najvrchnejšom krúžku, v každom kroku pokračuje jedným z dvoch krúžkov, ktoré sú hneď pod ním, a končí sa v najspodnejšom riadku. Na obr. 1 je príklad japonského trojuholníka rádu 6 a v ňom príklad nindža cesty obsahujúcej 2 červené krúžky.



Obr. 1

Nájdite najväčšie k také, že v každom japonskom trojuholníku rádu n existuje nindža cesta obsahujúca aspoň k červených krúžkov.

6. Nech ABC je rovnostranný trojuholník. Nech A_1, B_1, C_1 sú jeho vnútorné body také, že $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, $|AC_1| = |C_1B|$ a

$$|\measuredangle BA_1C| + |\measuredangle CB_1A| + |\measuredangle AC_1B| = 480^\circ.$$

Nech sa priamky BC_1 a CB_1 pretínajú v bode A_2, priamky CA_1 a AC_1 v bode B_2 a priamky AB_1 a BA_1 v bode C_2. Dokážte, že ak je trojuholník $A_1B_1C_1$ rôznostranný, tak existujú dva rôzne body ležiace na všetkých troch kružniciach opísaných trojuholníkom AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2.