

---

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

## Zadania úloh domáceho kola kategórie A

---

1 Na párty sa zišlo 20 osôb, z toho 10 chlapcov a 10 dievčat. Každému sa páči práve  $k$  osôb opačného pohlavia. Je vždy možné vytvoriť pár, v ktorom sa obom páči ten druhý? Riešte v prípade

- a)  $k = 5$ ;
- b)  $k = 6$ .

(Josef Tkadlec)

2 Z číier 1 až 9 vytvoríme 9-ciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi. Potom vypočítame súčty všetkých trojíc po sebe idúcich číier a zapíšeme týchto 7 súčtov vzostupne. Rozhodnite, či možno takto získať postupnosť

- a) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 22;
- b) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23.

(Patrik Bak)

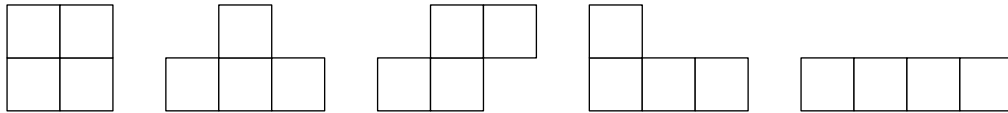
3 Nech  $T$  je ťažisko trojuholníka  $ABC$ . Nech  $K$  je bod polroviny  $BTC$  taký, že  $BTK$  je pravouhlý rovnoramenný trojuholník so základňou  $BT$ . Nech  $L$  je bod polroviny  $CTA$  taký, že  $CTL$  je pravouhlý rovnoramenný trojuholník so základňou  $CT$ . Označme  $D$  stred strany  $BC$  a  $E$  stred úsečky  $KL$ . Určte všetky možné hodnoty pomeru  $|AT| : |DE|$ .

(Michal Rolínek)

4 O nepárnom prvočíse  $p$  povieme, že je *špeciálne*, ak súčet všetkých prvočísel menších ako  $p$  je násobkom  $p$ . Existujú dve po sebe idúce špeciálne prvočísla?

(Jaroslav Zhouf)

5 Rozhodnite, či existuje neprázdna podmnožina políčok tabuľky  $7 \times 7$  taká, že pre každé z *tetramín*



možno túto podmnožinu vyplniť bez prekryvania výlučne jeho kópiami. Jednotlivé kópie môžeme ľubovoľne otáčať a preklápať.

(Michal Rolínek)

6 Pre reálne čísla  $a, b, c, d$  z uzavretého intervalu  $[1, 2]$  platí  $(a + c)(b + d) = 8$ . Dokážte, že

$$\frac{1}{a^2 + b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 + c^2 - 1} + \frac{1}{c^2 + d^2 - 1} + \frac{1}{d^2 + a^2 - 1} \geq 1,$$

a určte, kedy nastane rovnosť.

(Zdeněk Pezlar)

---

Termín odovzdania riešení: **5. 12. 2023**

---