2021/2022
71. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 19. – 25. 4. 2022.*)

1. [A0] Nájdite všetky polynómy $P(x)$ s reálnymi koeficientami, ktoré spĺňajú nasledujúce dve podmienky:
a) $P(2022) = 2021$,
b) $(P(x) + 1)^2 = P(x^2 + 1)$ pre všetky reálne čísla x.

2. [C0] K dispozícii máme nekonečne veľa guľôčok z každej zo 100 farieb $C_1, \dots, C_{100}$. Hovoríme, že celé číslo $m \geqq 101$ je *farebné*, ak je možné umiestniť m guľôčok do kruhu tak, že skupina ľubovoľných 101 po sebe idúcich guľôčok obsahuje aspoň jednu guľôčku farby C_i pre každé $i = 1, \dots, 100$. Dokážte, že existuje iba konečne veľa kladných celých čísel, ktoré nie sú farebné, a nájdite najväčšie z nich.

3. [G0] Nech ABC je trojuholník spĺňajúci $|AB| = |AC|$. Bod K leží vnútri trojuholníka ABC na jeho výške z vrcholu A. Bod L je zvolený na priamke BK tak, že $AL \parallel BC$. Dokážte, že ak $KC \perp CL$, tak bod L leží na osi vonkajšieho uhla ACB.

4. [N1] Nech $n \geqq 3$ je celé číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú nenulové celé čísla také, že

$$a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} \right)$$

je celé číslo. Vyplýva z toho nutne, že súčin $a_1 a_2 \cdots a_n$ je deliteľný a_i^2 pre všetky $1 \leqq i \leqq n$?

5. [N0] Nájdite všetky trojice kladných celých čísel (a, b, c) také, že $2^a + 2^b + 2^c - 21$ je druhou mocninou celého čísla.

6. [A2] Nájdite všetky neklesajúce funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(f(x^2) + y + f(y)) = x^2 + 2f(y).$$

7. [G3] A teraz nájdite všetky celé čísla $n \geqq 3$ s nasledovnou vlastnosťou: každý konvexný n-uholník, ktorého všetky strany majú dĺžku 1, obsahuje rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 1. (Každý mnohouholník obsahuje aj svoju hranicu.)

8. [G1] Nech ABC je rôznostranný ostrouhlý trojuholník a nech M je stred jeho strany BC. Body D a E sú päty výšok postupne z vrcholov C a B. Nech L a K sú postupne stredy úsečiek MD a ME. Priamka KL pretína priamky AB a AC postupne v bodoch X a Y. Dokážte, že štvoruholník $AXMY$ je tetivový.

9. [C2] Je daná postupnosť 51 kladných celých čísel, ktorých súčet je 101. Dokážte, že pre každé celé číslo k spĺňajúce $1 \leqq k \leqq 100$ vieme nájsť niekoľko po sebe idúcich čísel tejto postupnosti, ktorých súčet je k, alebo niekoľko po sebe idúcich čísel tejto postupnosti, ktorých súčet je $101 - k$.

10. [N3] Patrik má dané racionálne číslo $r > 1$ a priamku s dvoma bodmi $M \neq C$. V bode M sa nachádza modrý žetón a v bode C je červený žetón. Patrik hrá hru prevádzaním postupnosti ťahov. V každom ťahu si vyberie (nie nutne kladné) celé číslo k a žetón, ktorým chce pohnúť. Ak je tento žetón položený v bode X a druhý žetón je v bode Y, tak Patrik posunie vybraný žetón do bodu X' na polpriamke $\overrightarrow{YX}$ pre ktorý platí $|YX'| = r^k \cdot |YX|$. Patrikov cieľ je posunúť červený žetón do bodu M. Nájdite všetky racionálne čísla $r > 1$, pre ktoré vie Patrik dosiahnuť svoj cieľ na najviac 2022 ťahov.

11. [C1] Jožko a Majo hrajú hru na šachovnici $m \times n$, kde m a n sú kladné celé čísla. Striedajú sa v ťahoch, pričom Jožko začína. Jožko musí počas svojho ťahu umiestniť kameň na políčko, na ktorom zatiaľ žiaden kameň nie je. Majo tiež musí počas svojho ťahu umiestniť kameň na prázdne políčko, ale navyše toto políčko musí susediť stranou s políčkom, na ktoré umiestnil kameň Jožko v predošlom ťahu.

Majo vyhrá, ak je celá šachovnica zaplnená kameňmi. Jožko vyhrá, ak Majo nemôže umiestniť kameň počas jeho ťahu a na šachovnici je aspoň jedno prázdne políčko. Pre každú dvojicu kladných celých čísel (m, n) určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu.

12. [N2] Nájdite všetky kladné celé čísla n s nasledujúcou vlastnosťou: množina všetkých kladných deliteľov čísla n má permutáciu $(d_1, \dots, d_k)$ takú, že pre každé $i = 1, 2, \dots, k$ je číslo $d_1 + \dots + d_i$ druhou mocninou celého čísla.

13. [A3] Nech $n \geqq 2$ je celé číslo a $a_1, \dots, a_n$ sú kladné reálne čísla také, že $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Dokážte, že

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})^2 < \frac{1}{3}.$$

14. [A1] Nech n je kladné celé číslo a nech A je podmnožina množiny $\{0, 1, 2, \dots, 5^n\}$ so $4n + 2$ prvkami. Dokážte, že existujú $a, b, c \in A$ také, že $a < b < c$ a $c + 2a > 3b$.

15. [G2] Nech $ABCD$ je rovnobežník spĺňajúci $|AC| = |BC|$. Bod P leží na predĺžení úsečky AB za bodom B. Kružnica opísaná trojuholníku ACD pretína úsečku PD znova v bode Q. Kružnica opísaná trojuholníku APQ pretína úsečku PC znova v bode R. Dokážte, že priamky CD, AQ a BR sa pretínajú v jednom bode.

16. [C3] A teraz nech S je nekonečná množina kladných celých čísel taká, že existujú štyri po dvoch rôzne čísla $a, b, c, d \in S$ spĺňajúce $\mathrm{nsd}(a, b) \neq \mathrm{nsd}(c, d)$. Dokážte, že existujú tri po dvoch rôzne čísla $x, y, z \in S$ také, že $\mathrm{nsd}(x, y) = \mathrm{nsd}(y, z) \neq \mathrm{nsd}(z, x)$.

Poznámka. Výraz $\mathrm{nsd}(a, b)$ označuje najväčšieho spoločného deliteľa čísel a, b.