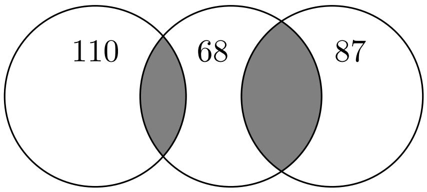
61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6*

---

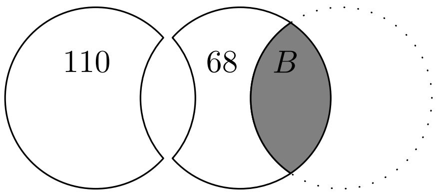
1. *Mirka čistila fazuľu do polievky na papieri, ktorý vytiahla zo stolíka svojej sestry. Na papieri boli nakreslené tri rovnako veľké kruhy, v ktorých spoločné časti boli vyfarbené sivou pastelkou. Do bielych častí jednotlivých kruhov umiestnila toľko fazuliek, koľko je napísané na obr. 1. Koľko fazuliek má umiestniť do sivých častí, aby bol v každom kruhu rovnaký počet fazuliek?* (*L. Šimůnek*)



Obr. 1

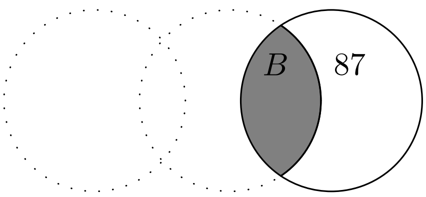
Nápad. V každom kruhu má byť rovnako veľa fazuliek.

Riešenie. Spoločnú časť prvých dvoch kruhov nazveme A, spoločnú časť druhého a tretieho kruhu nazveme B. Z druhého kruhu zostane po odtrhnutí časti A zvyšok, v ktorom musí byť rovnaký počet fazuliek, ako vo zvyšku, ktorý vznikne po odtrhnutí časti A z prvého kruhu (obr. 2). V zadaní sa uvádza, že v tejto zostávajúcej časti je 110 fazuliek a vďaka tomu vieme, že do časti B musíme dať $110 - 68 = 42$ fazuliek.

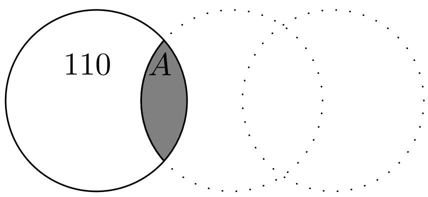


Obr. 2

Teraz už vieme koľko je fazuliek v treťom kruhu (obr. 3): $42 + 87 = 129$.



Obr. 3



Obr. 4

Rovnaký počet fazuliek musí byť v prvom aj druhom kruhu. Využitím prvého kruhu zistíme, že v časti A je $129 - 110 = 19$ fazuliek (obr. 4).

V sivých plochách je postupne zľava 19 a 42 fazuliek.

2. *Do hračkárstva priviezli nové plyšové zvieratká: vážky, pštrosy a kraby. Každá vážka má 6 nôh a 4 krídla, každý pštros má 2 nohy a 2 krídla a každý krab má 8 nôh a 2 klepetá. Dohromady majú tieto privezené hračky 118 nôh, 22 krídiel a 22 klepiet. Koľko majú dohromady hláv?* (M. Petrová)

Nápad. Využite, že z uvedených zvieratiek majú klepetá jedine kraby.

Riešenie. Pre prehľadnosť si údaje o jednotlivých hračkách zaznamenáme do tabuľky:

	nohy	krídla	klepetá	hlavy
vážka	6	4	0	1
pštros	2	2	0	1
krab	8	0	2	1

Je zrejmé, že klepetá majú jedine kraby. Pretože klepiet je 22 a každý krab má klepetá dve, musí byť krabov $22 : 2 = 11$. Tieto kraby majú dokopy $11 \cdot 8 = 88$ nôh. Na vážky a pštrosy potom zostáva $118 - 88 = 30$ nôh.

Vážky a pštrosy teda majú dokopy 30 nôh a 22 krídiel. Aby sme určili počty jednotlivých hračiek, všimneme si nasledujúcu tabuľku:

	nohy	krídla
jedna vážka	6	4
jeden pštros	2	2
dva pštrosy	4	4

Vidíme, že dva pštrosy majú dokopy rovnako veľa krídiel ako jedna vážka, ale majú o 2 nohy menej. Môžeme si to predstaviť tak, že z dvoch pštrosov „vyrobíme“ jednu vážku tak, že im „pridáme“ ešte dve nohy.

Podľa krídiel máme 11 pštrosov ($22 : 2 = 11$). Tie by ale mali len 22 nôh ($11 \cdot 2 = 22$). Ostáva nám teda 8 nôh ($30 - 22 = 8$), na ktorých budeme „prerábať pštrosy na vážky“. Vždy dve nohy premenia dva pštrosy na jednu vážku, vážky sú preto $8 : 2 = 4$.

Štyri vážky majú dokopy 24 nôh ($4 \cdot 6 = 24$) a 16 krídel ($4 \cdot 4 = 16$). Na pštrosy tak ostáva 6 nôh ($30 - 24 = 6$) a 6 krídel ($22 - 16 = 6$). Sú teda 3 ($6 : 2 = 3$). Predchádzajúce úvahy môžeme schematicky znázorniť nasledovne (symbol ìí predstavuje dve krídla a dve nohy, teda určujúce prvky jedného pštrosa):

$$\text{ìí} \quad \text{ìí} \quad \text{ìí} \quad \underbrace{\text{ìí} \quad \text{ìí}}_{\text{ıı}} \quad \underbrace{\text{ìí} \quad \text{ìí}}_{\text{ıı}} \quad \underbrace{\text{ìí} \quad \text{ìí}}_{\text{ıı}} \quad \underbrace{\text{ìí} \quad \text{ìí}}_{\text{ıı}}$$

Do hračkárstva priviezli 11 krabov, 4 vážky a 3 pštrosy. Keďže každé z týchto zvierat má jednu hlavu, dokopy majú 18 hláv ($11 + 4 + 3 = 18$).

Iné riešenie. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení určíme, že priviezli 11 krabov a že vážky a pštrosy majú dokopy 30 nôh a 22 krídel.

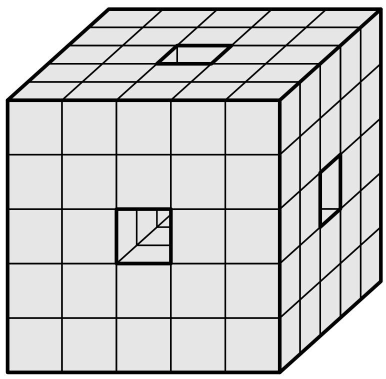
Keďže každá vážka má 6 nôh, môže ich byť nanajvýš 5 a jednotlivé možnosti postupne preberieme. Keby vážka bola jedna, ostávalo by na pštrosy $30 - 6 = 24$ nôh a $22-4 = 18$ krídel. Aby súhlasili počty nôh, muselo by byť pštrosov 12, ale aby súhlasili počty krídel, muselo by ich byť 9 – jedna vážka preto byť nemôže.

Ostatné prípady rozpisovať nebudeme, diskusiu zhrnieme nasledujúcou tabuľkou. Záver je rovnaký ako v predchádzajúcom riešení.

vážok	zostatok nôh	zostatok krídel	pštrosov
1	24	18	—
2	18	14	—
3	12	10	—
4	6	6	**3**
5	0	2	—

---

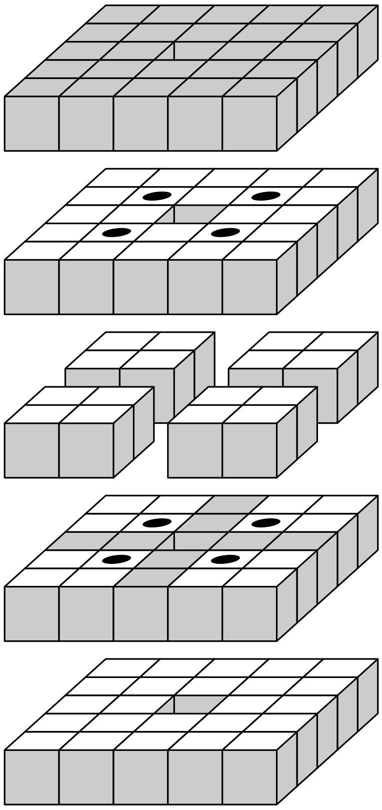
3. *Na obr. 5 je stavba zlepená z rovnakých kociek. Stavba je vlastne veľká kocka s tromi rovnými tunelmi, ktorými sa dá pozerať skrz a ktoré majú všade rovnaký prierez. Túto stavbu sme celú ponorili do farby. Koľko kociek, z ktorých je kocka zložená, má zafarbenú aspoň jednu stenu?* (*M. Krejčová*)



Obr. 5

Nápad. Zistite, koľko kociek nemá zafarbenú ani jednu stenu.

Riešenie. Stavbu rozdelíme štyrmi vodorovnými rezmi na päť vrstiev tak, ako na obr. 6. Prostredná vrstva sa skladá zo 16 kociek, ostatné vždy z 24 kociek. Celkový počet kociek je $16 + 4 \cdot 24 = 112$. Kocky, ktoré nemajú zafarbenú ani jednu stenu, sme na obrázku označili čiernou bodkou – je ich 8. Ostatné kocky majú zafarbenú aspoň jednu stenu a je ich teda $112 - 8 = 104$.



Obr. 6

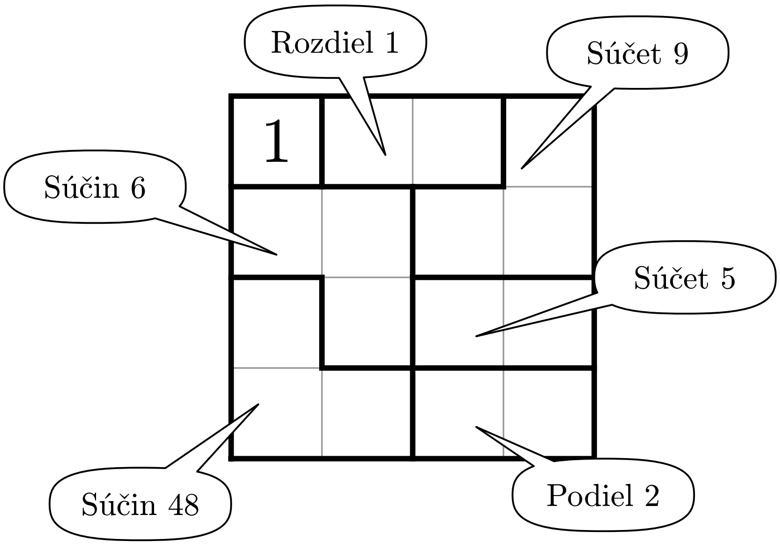
Iný nápad. Počítajte po vrstvách.

Iné riešenie. Pracujeme s obr. 6. V spodnej vrstve majú všetky kocky, ktorých je 24, zafarbenú aspoň jednu stenu. V druhej vrstve je 8 kociek s jednou zafarbenou stenou a 12 s dvoma zafarbenými stenami. V prostrednej vrstve majú všetky kocky dve ofarbené steny. Štvrtá vrstva je rovnaká ako druhá a piata je rovnaká ako prvá. Kociek, ktoré majú zafarbenú aspoň jenu stenu, sme teda dokopy napočítali

$$2 \cdot 24 + 2 \cdot (8 + 12) + 16 = 48 + 40 + 16 = 104.$$

---

4. *Do každého nevyplneného štvorčeka na obr. 7 doplňte číslo* 1, 2, 3 *alebo* 4 *tak, aby v každom stĺpci a riadku bolo každé z týchto čísel práve raz a aby boli splnené dodatočné požiadavky v každej vyznačenej oblasti.*



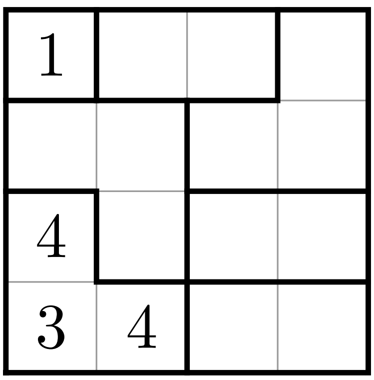
Obr. 7

(Ak vo vyznačenej oblasti požadujeme určitý podiel, máme na mysli podiel, ktorý získame vydelením väčšieho čísla menším. Podobne pracujeme aj s rozdielom.)

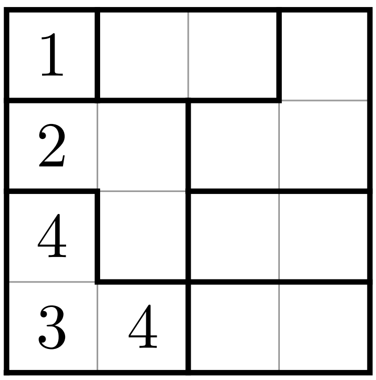
(*S. Bednářová*)

Nápad. Začnite súčinom 48.

Riešenie. Začneme súčinom 48: Potrebujeme číslo 48 rozložiť na súčin troch čísel tak, aby činitele boli len 1, 2, 3 alebo 4. To sa dá len jedným spôsobom, $48 = 3 \cdot 4 \cdot 4$, a činitele môžu byť v zodpovedajúcej oblasti doplnené jedine tak, ako na obr. 8. Do druhého políčka prvého stĺpca doplníme číslo 2, ktoré v tomto stĺpci chýba (obr. 9).

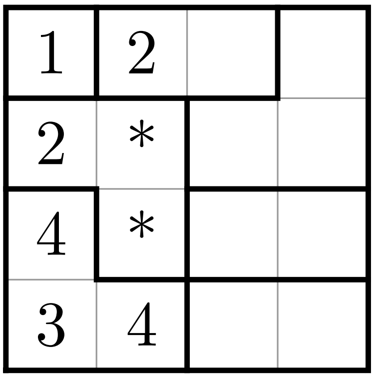


Obr. 8

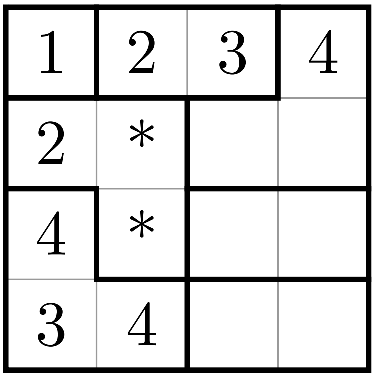


Obr. 9

Teraz sa zaoberajme súčinom 6, ktorý sa dá získať z daných čísel len ako $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. To znamená, že v druhom stĺpci budú okrem už napísaného čísla 4 ešte čísla 1 a 3 na prostredných dvoch políčkach (zatiaľ nevieme, v akom poradí). Takže v prvom políčku druhého stĺpca musí byť číslo 2 (obr. 10).



Obr. 10

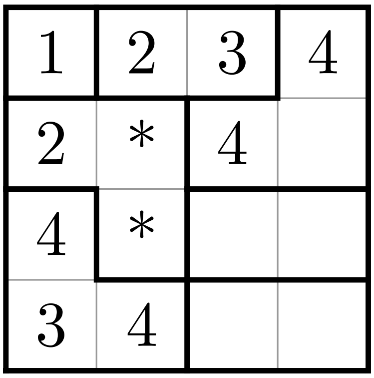


Obr. 11

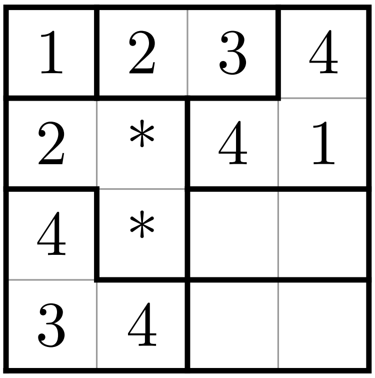
Rozdiel 1: Rozdiel dvoch čísel má byť 1, jedno z čísel je 2, takže druhé číslo musí byť 1 alebo 3. Keďže číslo 1 už je v prvom riadku napísané, musí byť v treťom políčku tohto riadku číslo 3.

Do štvrtého políčka prvého riadku tak musíme doplniť číslo 4, ktoré jediné v tomto riadku ešte napísané nie je (obr. 11).

Uvažujme teraz inak. Zatiaľ sme doplnili trikrát číslo 4, takže ešte jedno ostáva. Pretože v prvom, treťom a štvrtom riadku štvorky sú, bude tá posledná v druhom riadku. Takisto, pretože štvorka je napísaná v prvom, druhom a štvrtom stĺpci, chýba v treťom stĺpci. To znamená, že posledná, štvrtá štvorka, musí byť v druhom riadku tretieho stĺpca (obr. 12).



Obr. 12



Obr. 13

Súčet 9: V tejto oblasti chýba posledné číslo, a to musí byť $9 - 4 - 4 = 1$ (obr. 13).

V druhom políčku druhého riadku musí byť číslo 3, ktoré tu ako jediné zatiaľ napísané nie je. To znamená, že v treťom políčku druhého stĺpca bude číslo 1; buď preto, že v tomto stĺpci chýba, alebo preto, že chýba v oblasti so súčinom 6 (obr. 14).

1	2	3	4
2	3	4	1
4	1		
3	4		

Obr. 14

1	2	3	4
2	3	4	1
4	1		3
3	4	1	

Obr. 15

Ďalej môžeme uvažovať rovnako ako pri dopĺňaní posledného čísla 4. Doplnili sme trikrát číslo 1, ktoré zatiaľ nie je vo štvrtom riadku a treťom stĺpci. Rovnako tak doplníme i posledné číslo 3, ktoré chýba len v treťom riadku a vo štvrtom stĺpci (obr. 15).

Teraz už chýbajú len dve čísla 2. Ľahko overíme, že po ich doplnení do prázdnych políčok spĺňajú všetky zapísané čísla požadované podmienky (obr. 16).

1	2	3	4
2	3	4	1
4	1	2	3
3	4	1	2

Obr. 16

Poznámka. Samozrejme, dá sa postupovať rôznymi spôsobmi, v každom prípade si však rýchlo všimneme, že v zadaní je podstatne viac informácií, ako je treba na doriešenie úlohy. Pokiaľ sa napríklad prednostne zameriame na požiadavku, aby v každom stĺpci a riadku bolo každé z čísel 1, 2, 3, 4 práve raz, tak stačia už len tri zo šiestich ďalej uvedených informácií – ktoré tri by napríklad stačili?

---

5. *Ondro, Maťo a Kubo dostali na Vianoce od prarodičov každý jednu z nasledujúcich hračiek: veľké hasičské auto, vrtuľník na diaľkové ovládanie a stavebnicu Merkur. Bratranec Peťo doma hovoril:*

„Ondro dostal to veľké hasičské auto. Želal si ho síce Kubo, ale ten ho nedostal. Maťo nemá v obľube stavebnice, takže Merkur nebol pre neho.“

Ukázalo sa, že Peťo sa dvakrát mýlil v informácii, kto dostal či nedostal daný darček a len raz povedal pravdu. Ako to teda s darčekmi bolo a kto teda dostal aký darček?

(*M. Volfová*)

Nápad. Najskôr zistite, kto dostal hasičské auto.

Riešenie. Petrove výpovede o chlapcoch sú:

1. Ondro dostal hasičské auto,
2. Kubo nedostal hasičské auto,
3. Maťo nedostal Merkur.

Keby hasičské auto dostal Ondro, boli by prvé dve výpovede pravdivé. Ale pravdivá má byť len jedna výpoveď, takže hasičské auto Ondro dostať nemohol.

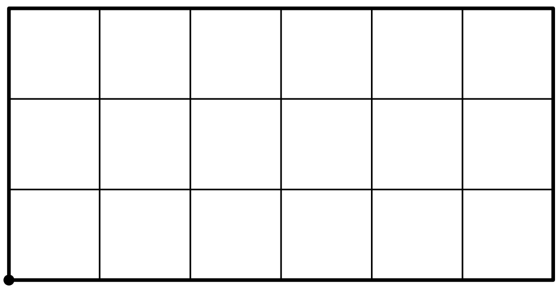
Keby hasičské auto dostal Maťo, boli by opäť dve výpovede pravdivé a to druhá a tretia.

Hasičské auto teda musel dostať Kubo. Prvé a druhé tvrdenie je preto nepravdivé a pravdivé musí byť tretie, že Maťo nedostal Merkur. Maťo nedostal ani hasičské auto (to dostal Kubo), takže musel dostať vrtuľník.

Darčeky boli rozdelené takto: Kubo dostal hasičské auto, Maťo vrtuľník a Ondro stavebnicu Merkur.

---

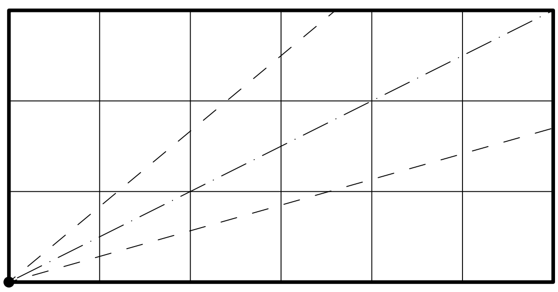
6. *Marta, Libuška a Mária si vymysleli hru, ktorú by chceli hrať na obdĺžnikovom ihrisku zloženom z 18 rovnakých štvorcov ako na obr. 17. Na hru potrebujú ihrisko rozdeliť dvoma rovnými čiarami na tri rovnako veľké časti. Navyše tieto čiary musia obe prechádzať tým rohom ihriska, ktorý je na obrázku vľavo dole. Poraďte dievčatám, ako majú dokresliť čiary, aby sa mohli začať hrať.* (*E. Trojáková*)



Obr. 17

Nápad. Dve z troch častí musia byť trojuholníky.

Riešenie. Ihrisko zložené z 18 rovnakých štvorcov treba rozdeliť na tri rovnako veľké časti. Veľkosť jednej časti bude potom $18 : 3 = 6$ štvorcov. Uhlopriečka delí ihrisko na dva rovnaké trojuholníky s obsahom $18 : 2 = 9$ štvorcov. To znamená, že pokiaľ máme dostať tri časti s obsahom 6 štvorcov, musí byť jedna z deliacich čiar „pod“ a druhá „nad“ touto uhlopriečkou (obr. 18). Dve z takto vzniknutých častí sú teda trojuholníky a jedna štvoruholník. Teraz stačí určiť čiary tak, aby trojuholníky mali obsah 6 štvorcov. Potom zostávajúci štvoruholník bude mať takisto požadovaný obsah.

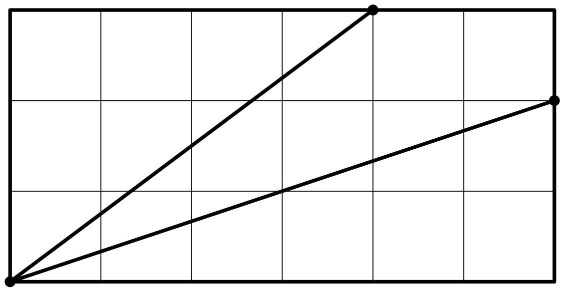


Obr. 18

Pozrime sa najskôr na trojuholník vľavo. Tento trojuholník je polovicou obdĺžnika, ktorého zvislá strana je dlhá tri dieliky. Obsah tohto obdĺžnika má byť $2 \cdot 6 = 12$ štvorcov, takže jeho druhá strana musí byť dlhá $12 : 3 = 4$ dieliky – môžeme nakresliť prvú deliacu čiaru.

Postupujme podobne pri druhom – pravom trojuholníku. Tento trojuholník má byť polovicou obdĺžnika s obsahom 12 štvorcov, ktorého vodorovná strana je dlhá 6 dielikov. Jeho zvislá strana musí byť potom dlhá $12 : 6 = 2$ dieliky – môžeme nakresliť druhú deliacu čiaru.

Dievčatá by mali rozdeliť ihrisko tak ako na obr. 19.



Obr. 19

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	1. L. Šimůnek, 2. M. Petrová, 3. M. Krejčová, 4. S. Bednářová, 5. M. Volfová, 6. E. Trojáková
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Trojáková
Redakčná úprava:	Erika Trojáková, Vojtěch Žádník
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011