**2022/2023**
**72. ročník Matematickej olympiády** *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 21. – 27. 4. 2023.*)

**1.** Dané je celé číslo $k \geqq 2$. Nájdite najmenšie celé číslo $n \geqq k+1$, pre ktoré existuje $n$-prvková množina $S$ rôznych reálnych čísel s nasledujúcou vlastnosťou: Každý prvok $a$ množiny $S$ sa dá vyjadriť ako súčet $k$ rôznych prvkov množiny $S \setminus \{a\}$.

**2.** V rade vedľa seba je umiestnených 2022 vedier s vodou. Každé z nich je ofarbené buď červenou, alebo modrou farbou. Losos Sally sa hrá hru nasledovným spôsobom:

Najprv si pozrie, ako sú ofarbené vedrá, a vyberie si vedro, v ktorom chce začať. Potom môže, koľkokrát chce, preskočiť buď do ďalšieho vedra v rade, alebo do vedra za týmto vedrom (t.j. stále skáče tým istým smerom a nemôže preskočiť ponad viac ako jedno vedro). V ľubovoľnom momente sa môže rozhodnúť ukončiť hru.

Keď ukončí hru, tak spočíta svoje skóre. To je dané ako absolútna hodnota rozdielu medzi počtom červených a počtom modrých vedier, ktoré Sally navštívila počas hry.

Nájdite najväčšie $C$ také, že bez ohľadu na počiatočné ofarbenie vedier môže Sally vždy získať skóre aspoň $C$.

**3.** Uhlopriečky rovnobežníka $ABCD$ sa pretínajú v bode $O$. Dotyčnice ku kružnici opísanej trojuholníku $AOD$ vedené bodmi $A$ a $D$ pretnú polpriamky opačné k polpriamkam $BC$ a $CB$ postupne v bodoch $P$ a $Q$. Dokážte, že tieto dotyčnice sa dotýkajú aj kružnice opísanej trojuholníku $POQ$.

**4.** Nech $d(k)$ označuje počet kladných deliteľov celého čísla $k$. Napríklad $d(6)=4$, lebo 6 má štyroch kladných deliteľov, konkrétne 1, 2, 3 a 6. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla $n$ platí

$$d(1)+d(3)+d(5)+\ldots+d(2n-1) \leqq d(2)+d(4)+d(6)+\ldots+d(2n).$$

**5.** Kružnica prechádzajúca vrcholmi $A$, $B$ ostrouhlého rôznostranného trojuholníka $ABC$ sa dotýka osi strany $BC$ v bode $K$ a pretína stranu $BC$ druhýkrát v bode $L \neq B$. Označme $M$ stred úsečky $AC$. Dokážte, že $KM \perp AL$.

**6.** Nech $a>1$ a $d>1$ sú nesúdeliteľné celé čísla. Nech $x_1 = 1$ a pre $k \geqq 1$ definujeme

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + d & \text{ak } a \nmid x_k \\ x_k/a & \text{ak } a \mid x_k. \end{cases}$$

V závislosti od celých čísel $a$ a $d$ určite najväčšie kladné celé číslo $n$, pre ktoré existuje index $k$ taký, že $a^n \mid x_k$.

**7.** Označme $\mathcal{F}$ množinu všetkých funkcií $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré spĺňajú

$$f(x+f(y)) = f(x) + f(y)$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. Nájdite všetky racionálne čísla $q$ také, že pre každú funkciu $f \in \mathcal{F}$ existuje nejaké $z \in \mathbb{R}$ také, že $f(z) = qz$.

**8.** Nech $\mathbb{Z}^+$ označuje množinu všetkých kladných celých čísel. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, ktoré spĺňajú

$$f(a) + f(b) \mid (a+b)^2$$

pre všetky kladné celé čísla $a$, $b$.

**9.** Dané je kladné celé číslo $n$. Máme $n$ kôpok kamienkov, na každej z nich je na začiatku jediný kamienok. Môžeme vykonávať ťahy nasledovného typu: vyberieme dve kôpky, z každej vezmeme rovnaký počet kamienkov a z týchto kamienkov vytvoríme novú kôpku.

Pre každé kladné celé číslo $n$ nájdite najmenší možný počet neprázdnych kôpok, ktoré môžeme dosiahnuť konečnou postupnosťou krokov tohto typu.

**10.** V ostrouhlom trojuholníku $ABC$ splňajúcom $|AB| < |AC|$ označme $O$ stred kružnice opísanej a $D$ ľubovoľný bod na strane $BC$. Kolmica na $BC$ vedená bodom $D$ pretne úsečky $AO$, $AC$ a priamku $AB$ postupne v bodoch $W$, $X$, $Y$. Kružnice opísané trojuholníkom $AXY$ a $ABC$ sa druhýkrát pretnú v bode $Z \neq A$. Dokážte, že ak $|OW| = |OD|$, tak $DZ$ je dotyčnica kružnice opísanej trojuholníku $AXY$.

**11.** Majme záhradu tvaru tabuľky $42 \times 42$. Na začiatku je v každom políčku strom výšky 0. V tejto záhrade sa *záhradník* a *drevorubač* hrajú nasledovnú hru, pri ktorej záhradník začína a potom sa striedajú v ťahoch:

- Záhradník si vo svojom ťahu vyberie políčko záhrady. Strom na tomto políčku a všetky stromy na políčkach susediacich s týmto políčkom stranou alebo vrcholom (ktorých je najviac 8) zväčšia svoju výšku o 1.
- Drevorubač si vo svojom ťahu vyberie ľubovoľné 4 rôzne políčka. Všetky stromy na týchto 4 políčkach, ktorých výška je väčšia ako 0, zmenšia svoju výšku o 1.

O strome povieme, že je *majestátny*, ak má výšku aspoň $10^6$. Nájdite najväčšie celé číslo $K$ také, že záhradník vie zabezpečiť, že v záhrade bude aspoň $K$ majestátnych stromov, bez ohľadu na to, ako hrá drevorubač.

**12.** Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných reálnych čísel. Predpokladajme, že existuje konštanta $M > 0$ taká, že $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 < M a_{n+1}^2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že existuje konštanta $M' > 0$ taká, že $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < M' a_{n+1}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

**13.** Pre každé $1 \leqq i \leqq 9$ a každé kladné celé číslo $T$ definujeme $d_i(T)$ ako celkový počet výskytov cifry $i$ v cifernom zápise čísel

$$2023, \quad 2 \cdot 2023, \quad 3 \cdot 2023, \quad \ldots, \quad T \cdot 2023$$

v desiatkovej sústave.

Dokážte, že existuje nekonečne veľa kladných celých čísel $T$ takých, že medzi číslami $d_1(T), d_2(T), \ldots, d_9(T)$ sú presne dve rôzne hodnoty.

**14.** Nech $P$ je polynóm s celočíselnými koeficientami spĺňajúci $P(16) = 36$, $P(14) = 16$, $P(5) = 25$. Určte všetky možné hodnoty $P(10)$

**15.** V ostrouhlom trojuholníku $ABC$ označme $F$ pätu výšky z vrchola $A$ a $P$ ľubovoľný bod na úsečke $AF$. Rovnobežky vedené bodom $P$ so stranami $AC$, $AB$ pretnú stranu $BC$ postupne v bodoch $D$, $E$. Body $X \neq A$ a $Y \neq A$ ležia postupne na kružniciach opísaných trojuholníkom $ABD$ a $ACE$ tak, že $|DA| = |DX|$ a $|EA| = |EY|$. Dokážte, že body $B$, $C$, $X$, $Y$ ležia na jednej kružnici.

**16.** Majo si na začiatku napíše na tabuľu $s$ celočíselných 2023-tíc. Potom môže zobrať dve (nie nutne rôzne) 2023-tice $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_{2023})$ a $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_{2023})$, ktoré sú už napísané na tabuli, a použiť jednu z nasledujúcich operácií, aby dostal novú 2023-ticu

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (v_1 + w_1,\ \ldots,\ v_{2023} + w_{2023}), \\ \mathbf{v} \vee \mathbf{w} &= (\max(v_1, w_1),\ \ldots,\ \max(v_{2023}, w_{2023})) \end{aligned}$$

a napísal ju na tabuľu.

Ukázalo sa, že týmto spôsobom vie Majo napísať ľubovoľnú celočíselnú 2023-ticu na tabuľu po konečne veľa krokoch. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu $s$ počtu 2023-tíc, ktoré Majo na začiatku napísal na tabuľu.